



Brandenburgische Technische Universität C-S (BTU)

Moskauer Energetisches Universität (МЭИ)

Numerische Berechnungen der Temperaturverteilung in einem Wasserbehälter mit transparenter Abdeckung bei direkter Sonnenstrahlung

Master-Thesis

Betreuer:	Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Heymer (BTU) Prof. Dr. Vladimir Agababov (MEI)
Bearbeiter:	B.Eng. Eduard Völker
Matrikel-Nummer:	282740
Studiengang:	Klimagerechtes Bauen und Betreiben
Datum:	15.08.2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IV
Abkürzungsverzeichnis	VI
Symbolverzeichnis.....	VII
1 Einleitung.....	1
2 Physikalische Grundlagen	2
2.1 Wärmeleitung	2
2.2 Wärmeleitungsgleichung eindimensional.....	2
2.3 Wärmeübergang (Konvektion)	4
2.4 Diffusion	4
2.5 Wärmestrahlung.....	5
2.6 Wärmestrahlung im durchlässigen Körper	5
2.7 Spektraler Absorptionskoeffizient	6
2.8 Absorptionsverhalten des Wassers	15
3 Strömungsmechanik	17
4 Finite Volumen Methode.....	18
5 Software.....	19
5.1 ANSYS	19
5.2 ANSYS-Produktportfolio	19
5.3 Simulationsumgebung	21
5.4 Analoge Anwendungsbereiche	23
6 Strömungsmechanik mit FLUENT.....	25
7 Validierung	27
7.1 Annahmen für die Validierung	27
7.2 Berechnungsparameter.....	29

7.3 Ergebnisse der analytischen Berechnung der 1D Wärmeleitung.....	29
7.3.1 Ergebnisse der numerischen Berechnung der 1D Wärmeleitung mit FLUENT .	32
7.3.2 Direkter Vergleich.....	33
7.4 Ergebnisse der analytischen Berechnung der Wärmetransportgleichung.....	34
7.4.1 Wärmestrahlung mit FLUENT.....	37
7.4.2 Ergebnisse der numerischen Berechnung der Wärmestrahlung.....	39
8 Berücksichtigung der Wärmeverluste durch die Konstruktion	42
9 Temperaturverteilung innerhalb eines Tages.....	44
9.1 Ergebnisse mit dem P1-Strahlungsmodell.....	46
9.2 Ergebnisse mit dem Strahlungsmodell Discrete Ordinates (DO)	48
10 Berechnungen der Temperaturverteilung innerhalb eines Jahres	53
10.1 Simulation mit Jahresmittelwerten	53
10.1.1 Ermittlung der Effektivität des Speichers	54
10.2 Simulation mit Monatsmittelwerten	55
10.2.1 Kontrolle der Ergebnisse mittels Energiebilanz.....	58
11 Zusammenfassung	60
 Literaturverzeichnis	 IX
Begriffserklärung.....	XI
Ehrenwörtliche Erklärung.....	XII
Anhang A.....	1
Berechnung des Absorptionskoeffizienten (Variante 2) mit Maple	1
Anhang B.....	8
Lösung der Wärmeleitung mit Maple.....	8

Abbildungsverzeichnis

Bild 1 Stationäre Wärmeleitung	2
Bild 2 Auskühlverhalten Innenwand bei konst. Umgebungstemperatur.....	3
Bild 3 Darstellung der Schwächung der Intensität im strahlungsdurchlässigen Körper	6
Bild 4 Spektrale Verteilung der von der Sonne dargebotenen Strahlungsenergie und ihre Schwächung beim Durchgang durch die Erdatmosphäre.....	7
Bild 5 Absolutwerte der Belastungsstärke und des Absorptionskoeffizienten abhängig von der Wellenlänge	8
Bild 6 Konstante Belastungsstärke im visuellen Wellenlängenbereich	9
Bild 7 Verlauf der extraterrestrischen Solarstrahlung	10
Bild 8 Verlauf der spektralen Bestrahlungsstärke außerhalb der Atmosphäre E0 und am Erdboden E1	11
Bild 9 Exponentielle Erwärmung an zwei Punkten x1 und x2.....	13
Bild 10 Verlauf der Strahlungsabsorption bei einem Absorptionskoeffizienten von $0,187 \text{ m}^{-1}$ im Wasserbehälter mit 1,86m Tiefe.	016
Bild 11 Verlauf der Strahlungsabsorption bei einem Absorptionskoeffizienten von $2,5 \text{ m}^{-1}$	16
Bild 12 Beispielhafte Darstellung der Zusammensetzung des g-Wertes.	27
Bild 13 Temperaturverlauf nach 432000 sek.	31
Bild 14: Zeigt den Temperaturverlauf im 3D-Plot nach 432000 Sekunden	31
Bild 15 Temperaturschichtung im Festkörper mit Wärmeleitfähigkeit und spez. Kapazität des Wassers.....	32
Bild 16: Zeigt Temperaturverlauf über die Höhe des Speichers	33
Bild 17 Temperaturverlauf mit kurzweiliger Wärmestrahlung	36
Bild 18 Temperaturverlauf in Abhängigkeit von Ort und Zeit.....	36
Bild 19 Temperaturschichtung bei nahezu vollständiger Absorption der Wärmestrahlung mit einem Absorptionskoeffizienten von $2,5 \text{ m}^{-1}$	39
Bild 20 Temperaturverlauf über die Höhe des Speichers bei nahezu vollständiger Absorption der Wärmestrahlung	39
Bild 21: Zeigt die Temperaturschichtung im unteren Bereich des Speichers.	40
Bild 22: Zeigt die Temperaturerhöhung im unteren Bereich des Speichers	40
Bild 23 2-dimensionale Temperaturverteilung mit der mittleren Wassertemperatur von 298.68 Kelvin	42

Bild 24 Temperaturschichtung nach 12 Stunden. Links in der Aufwärmphase am Tag. Rechts in der Abkühlphase in der Nacht ohne Konvektion.....	46
Bild 26 Temperaturschichtung nach 24 Stunden mit Konvektion. Die mittlere Wassertemperatur ist auf 282,64 K gesunken	47
Bild 25 Verlauf der mittleren Wassertemperatur am Tag und in der Nacht.....	47
Bild 27 Temperaturverteilung nach 2 Stunden (links) und nach 6 Stunden (rechts)	50
Bild 28 Temperaturverteilung nach 10 Stunden (links) und nach 12 Stunden (rechts)	50
Bild 29 Temperaturverteilung nach ca. 7,5 Stunden. Links mit Konvektion, rechts ohne Konvektion	51
Bild 30 Temperaturverteilung nach ca. 9 Stunden	51
Bild 31 Temperaturverteilung nach ca. 12 Stunden	52
Bild 32 Temperaturverteilung mit Jahresmittelwerten und der dazugehörige Verlauf der mittleren Wassertemperatur.....	54
Bild 34 zeigt die Temperaturschichtung im Februar (links) und im Juli (rechts)	56
Bild 33 Links ist der Verlauf der mittleren Wassertemperatur dargestellt. Rechts ist die Temperatur an der Oberfläche zu sehen	56
Bild 35 Temperaturschichtung ende November ohne Konvektion (links) und mit Konvektion nach ca 17 Minuten (rechts).....	57
Bild 36 Auftriebsgeschwindigkeit und deren Richtung (links) sowie Darstellung der Strömungslinien (rechts).....	57
Bild 37 Temperaturverlauf aus der Bilanzrechnung und mit FLUENT	58
Bild 38 Temperaturverteilung mit Leitungsstäben nach 12 St. Sonnenscheindauer	60
Bild 39 Temperaturverteilung mit Leitungsstäben nach 12 St. Abkühlung	61

Abkürzungsverzeichnis

1D, 2D, 3D	1,2,3 dimensional
AC	Wechselstrom (alternating current)
ANSYS	Analysis System
CAD	Computer-Aided Design
CAE	Computer-Aided Engineering
CFD	Computational Fluid Dynamics
DC	Gleichstrom (direct current)
DES	Detached-Eddy Simulation
DIN	Deutsches Institut für Normung
Hz	Herz
ICEM	Integrated Computer-aided Engineering and Manufacturing
Inc.	Incorporated Company
ISO	Internationale Organisation für Normung
LES	Large Eddy Simulation (Strömung mit großen Reynolds-Zahlen)
SASI	Swanson Analysis Systems, Inc.
SST	Shear-Stress-Transport

Symbolverzeichnis

Kurzzeichen	Einheit	Bedeutung
A	m^2	Fläche
Cp	$\text{Wh}/(\text{kg K})$	spezifische Wärmekapazität
D	m^2/s	Diffusionskoeffizient
d	m	Dicke
E	$\text{W}/\text{m}^2\mu\text{m}$	Spektrale Bestrahlungsstärke
h	$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$	Wärmeübergangskoeffizient
L	m	Länge
q	W/m^2	Wärmestromdichte
T	K, °C	Temperatur
t	s	Zeit
λ	$\text{W}/(\text{m K})$	Wärmeleitfähigkeit
ρ	kg/m^3	Dichte
k	m^{-1}	Absorptionskoeffizient
Rse	$(\text{m}^2 \text{K})/\text{W}$	Wärmeleitwiderstand außen

1 Einleitung

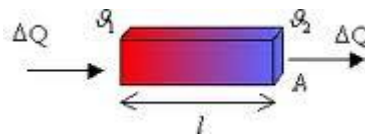
In Zeiten des Klimawandels werden Möglichkeiten gesucht, die zu Verfügung stehende Sonnenenergie effektiv und kostengünstig zu nutzen. Ein Behälter mit Wasser und einer transparenten Abdeckung bietet die einfachste Form, Sonnenenergie einzufangen und zu speichern. Diese Überlegung stammt aus der Idee, schwimmende Häuser autark zu versorgen. Dazu soll ein schwimmender Warmwasserspeicher konstruiert werden. Dabei handelt es sich um geschlossene Konstruktion aus Porenbeton, Wärmedämmung und Edelstahl. Die obere Abdeckung besteht aus einer lichtdurchlässigen 2-fach verglasten Glasscheibe. Die eingefangene Wärme soll gespeichert werden und bei Bedarf zur Versorgung der schwimmenden Bauten dienen. Da es im See keine großen Verschattungen gibt, eignet sich dieser Einsatzort besonders. Es soll jedoch vorher berechnet werden, wie effektiv diese einfache Methode bezüglich der Aufnahme und des Speicherns von Sonnenenergie sein kann. Dazu wurden zwar einige Untersuchungen gemacht, jedoch mit unterschiedlichen Ergebnissen[1][2].

Diese Arbeit hingegen bezieht sich auf die Annahme, dass es im Speicher genau wie im Gewässer eine starke Temperaturschichtung geben muss. Diese wirkt sich unterschiedlich auf die Wärmeverluste aus. So sind an der Glasscheibe höhere Verluste als im unteren Bereich des Behälters zu erwarten. Die Zielsetzung besteht in erster Linie darin, die Temperaturschichtung zu berechnen, um Auswirkungen auf die Effizienz abschätzen zu können. Neben der Betrachtung der Effektivität wird in dieser Arbeit auch viel Wert auf die Randbedingungen gelegt. Es werden Annahmen getroffen, die die Einflüsse auf die Temperatur möglichst realitätsnah beschreiben. Dafür werden zunächst die verwendeten physikalischen Grundlagen erläutert.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Wärmeleitung

Wärmeleitung ist ein Prozess, bei dem die Wärme innerhalb eines Mediums von einem höheren zu einem niedrigen Temperaturbereich strömt. Dabei wird die Schwingungsenergie und kinetische Energie der Elektronen durch Stöße zwischen den benachbarten Molekülen eines Stoffes übertragen. Dieser Effekt tritt auch bei unterschiedlichen Stoffen, deren Oberflächen sich berühren, auf. Für die Konduktion ist die Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes entscheidend.



2.2 Wärmeleitungsgleichung eindimensional

Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt die Änderung der Temperatur über die Zeit und Ortskoordinate. Sie geht aus dem Energieerhaltungssatz und dem Fourierschen Gesetz hervor.

Stationär

Bei der stationären Wärmeübertragung wird keine Wärme gespeichert. Die Energie wird auf einer Seite zugeführt und auf der anderen Seite abgeführt. Es wird angenommen, dass dies stetig geschieht, sodass die Zeit keine Rolle spielt. Damit kann z. B. bei einer Hauswand der Wärmedurchgangskoeffizient ermittelt werden, um die Effizienz der Dämmung beurteilen zu können.

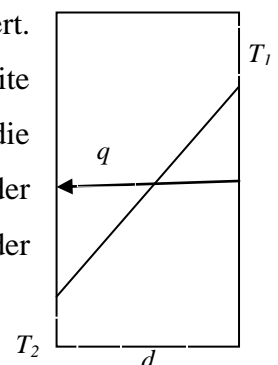


Bild 1: Stationäre Wärmeleitung

Aus dem Fourier Ansatz für stationäre 3-dimensionale Wärmeleitung[3]

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

erhalten wir eine physikalische Größe zur quantitativen Beschreibung von Wärmeübertragungsvorgängen

$$q = \frac{\lambda}{d} * (T1 - T2) \quad (2.2)$$

q: Wärmestromdichte [W/m²]

λ: Wärmeleitfähigkeit [W/(K*m)]

d: Dicke des Mediums [m]

T: Temperatur [K]

Instationär

Der instationäre Wärmevergang beschreibt das Aufheiz- und Auskühlverhalten eines Mediums über die Zeit. Die Umgebungstemperatur kann je nach Situation als konstant, linear, periodisch oder aperiodisch angenommen werden.

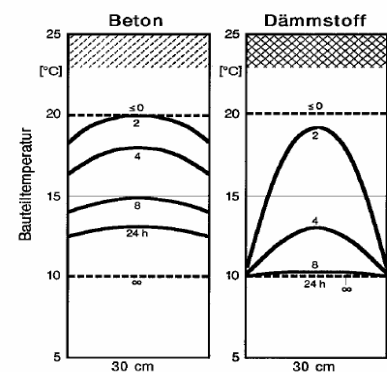


Bild 2 Auskühlverhalten Innenwand bei konst. Umgebungstemperatur

Die Wärmestromgleichung lautet:

$$Q = m * Cp * \frac{dT}{d\tau} = q * A \quad (2.3)$$

Für die instationäre Temperaturverteilung im Körper muss die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (2.4)$$

gelöst werden, wobei mit

$$a = \frac{\lambda}{\rho * c_p} \quad (2.5)$$

die Temperaturleitfähigkeit eines Materials in m^2/s beschrieben wird.

2.3 Wärmeübergang (Konvektion)

Konvektion ist ein Vorgang zur Aufnahme, Übertragung von einem Ort zu einem anderen und Abgabe der thermischen Energie. Es ist zu unterscheiden zwischen der freien und der erzwungenen Konvektion. Für die Konvektion ist die Grenzschicht des umgebenden Mediums an der Bauteiloberfläche von Bedeutung.

Freie Konvektion ist eine Zirkulation und Strömungsbewegung, die durch Dichteunterschiede infolge Temperaturänderung hervorgerufen wird. Die Bewegung des Mediums und die Ausbildung der Grenzschicht sind von der thermischen Auftriebskraft abhängig. Diese Analyse der Auftriebskraft muss das umgebende Medium miteinbeziehen und die fluiddynamischen Bedingungen berücksichtigen. (nichtlineares Problem)

Bei der erzwungenen Konvektion wird die Strömung durch äußere Einwirkung hervorgerufen. Dies kann zum Beispiel durch Pumpen oder Gebläse erfolgen. Damit ist die Bewegung des Mediums von äußeren Einflüssen vorgegeben und hängt nicht von der thermischen Auftriebskraft ab. (lineares Problem)

2.4 Diffusion

Diffusion wird als das Wandern einzelner sehr kleiner Teilchen beschrieben, die sich durch thermische Eigenbeweglichkeit in Richtung geringerer Konzentration bewegen. Dieser Vorgang wird mit dem „Fick’schen Gesetz“ formuliert und ist analog zu der Wärmeleitungsgleichung.

2.5 Wärmestrahlung

Wärmestrahlung ist eine elektromagnetische Strahlung, bei der die Wärmeübertragung durch elektromagnetische Wellen im sichtbaren und im infraroten Wellenlängenbereich stattfindet. Im Gegensatz zu Konvektion und Wärmeleitung wird hier kein Trägermedium benötigt, sodass die Wärmeübertragung auch im Vakuum erfolgen kann. Da sich die Strahlung nur geradlinig ausbreitet, müssen Hindernisse berücksichtigt werden.

2.6 Wärmestrahlung im durchlässigen Körper

Reines Wasser lässt kurzwellige Strahlung fast ungehindert hindurch. Da das Wasser in der Regel unterschiedliche Konzentrationen von Inhaltsstoffen aufweisen kann z. B. Salzgehalt, Calcium u.a., ändert sich das Transmissionsverhalten. So dass die kurzwellige Strahlung im Wasser mit hohen Konzentrationen von Zusatzstoffen unter der Berücksichtigung der Schichtdicke vollständig absorbiert werden kann.

Der Einfluss der Schichtdicke zeigt sich im *Reintransmissionsgrad* τ_i , der wiederum ganz stark von dem *spektralen Schwächungskoeffizienten* s abhängig ist.

$$\tau_i(\lambda, s) = e^{-s(\lambda) \cdot l} = 1 - a_i(\lambda, s) \quad (2.6)$$

Der Index i stellt die im Innern stattfindende Abschwächung der Strahlung dar.

Der spektrale Schwächungskoeffizient setzt sich zusammen aus der Summe des spektralen Absorptionskoeffizienten und spektralen Streukoeffizienten.

$$s(\lambda) = g(\lambda) + k(\lambda)$$

$s(\lambda)$ = spektraler Schwächungskoeffizient (bei λ gemessen)

$g(\lambda)$ = spektraler Streukoeffizient (bei λ gemessen)

$k(\lambda)$ = spektraler Absorptionskoeffizient (bei λ gemessen)

Streuung begünstigt die Absorption, ist jedoch nicht immer entscheidend. Streuung ist von den Hauptbestandteilen des Wassers abhängig, daher auch variabel (anpassbar/veränderbar). Aus der Literatur wurde nur der spektraler Absorptionskoeffizient für Wasser entnommen.

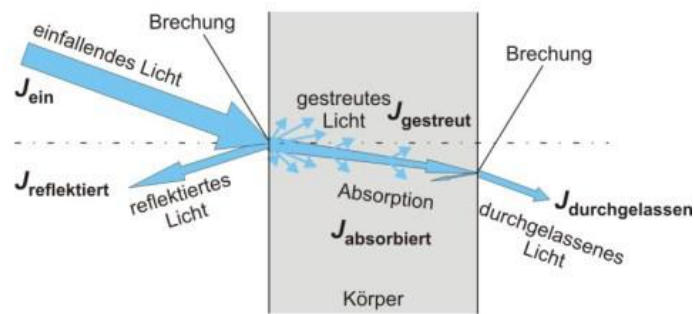


Bild 3 Darstellung der Schwächung der Intensität im strahlungsdurchlässigen Körper

2.7 Spektraler Absorptionskoeffizient

Der Absorptionskoeffizient hat einen erheblichen Einfluss auf die Temperaturverteilung und sollte daher möglichst genau bestimmt werden. Für die meisten Stoffe hängt der Absorptionskoeffizient nicht von der Schichtdicke L ab, sondern ist eine von der Wellenlänge abhängige Materialeigenschaft $\kappa = \kappa(\lambda)$ [4].

Tabelle 1: Spektraler Absorptionskoeffizient $\kappa(\lambda)$ von Wasser [4]

λ μm	κ_λ cm^{-1}	λ μm	κ_λ cm^{-1}	λ μm	κ_λ cm^{-1}	λ μm	κ_λ cm^{-1}	λ μm	κ_λ cm^{-1}
0,20	0,0691	0,70	0,0060	1,8	8,03	3,8	112,0	7,0	574,0
0,25	0,0168	0,75	0,0261	2,0	69,1	4,0	145,0	7,5	546,0
0,30	0,0067	0,80	0,0196	2,2	16,5	4,2	206,0	8,0	539,0
0,35	0,0023	0,85	0,0433	2,4	50,1	4,4	294,0	8,5	543,0
0,40	0,00058	0,90	0,0679	2,6	153,0	4,6	402,0	9,0	557,0
0,45	0,00029	0,95	0,388	2,8	5160,0	4,8	393,0	9,5	587,0
0,50	0,00025	1,0	0,363	3,0	11400,0	5,0	312,0	10,0	638,0
0,55	0,000045	1,2	1,04	3,2	3630,0	5,5	265,0		
0,60	0,0023	1,4	12,4	3,4	721,0	6,0	2240,0		
0,65	0,0032	1,6	6,72	3,6	180,0	6,5	758,0		

Die von der Sonne gebotene Strahlungsenergie hat eine spektrale Verteilung der Belastungsstärke. Beim Durchgang durch die Erdatmosphäre wird diese geschwächt. Die Gase O_3 , O_2 , sowie Wasserdampf(H_2O) absorbieren die Strahlungsenergie unterschiedlich stark in bestimmten Wellenlängenbereichen[4].

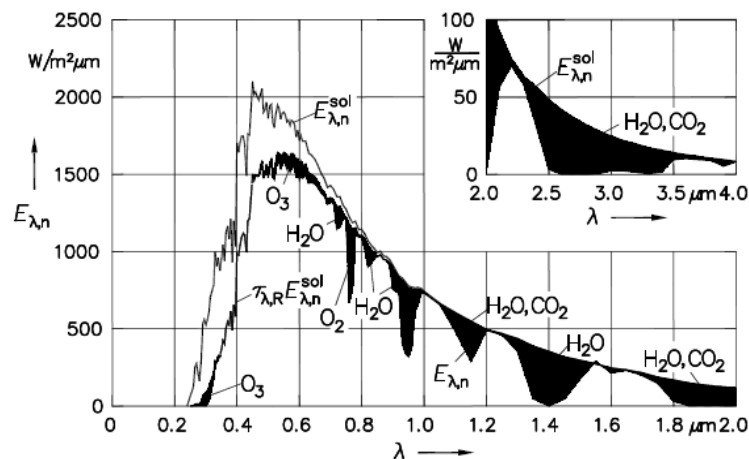


Bild 4 Spektrale Verteilung der von der Sonne dargebotenen Strahlungsenergie und ihre Schwächung beim Durchgang durch die Erdatmosphäre[4].

Wie im Bild 4 zu sehen, absorbieren die atmosphärischen Gase Strahlungsenergie überwiegend im infraroten Wellenlängenbereich. Die schwarz dargestellten Flächen zeigen die absorbierte Wärmestromdichte. Da die vollständige Verteilung der spektralen Strahlungsenergie innerhalb der Atmosphäre nur schwer zu ermitteln ist, beschränkt sich diese Arbeit auf die spektrale Verteilung im visuellen Wellenlängenbereich (**0,4-0,8 μm**). Dabei macht der Anteil an extraterrestrischer Strahlung im visuellen Bereich 46 % der gesamten Strahlung aus. Die gesamte Strahlung, die die Erde außerhalb der Erdatmosphäre erreicht, beträgt ca. 1368 W/m^2 und ist auch als Solarkonstante E_s bekannt.

$$E_v = \int_{0,4}^{0,8} E_0(\lambda) d\lambda = 630 \text{ W/m}^2 \quad (2.7)$$

$$\frac{630 \text{ W/m}^2}{1368 \text{ W/m}^2} * 100\% = 46\%$$

Aus einem ausführlichen Beispiel 5.7 im Lehrbuch für Wärme- und Stoffübertragung geht eine horizontale Belastungsstärke am Boden mit ca 600 W/m^2 hervor. Auch der mittlere Tagesgang der direkten Sonnenstrahlung im Juli mit geringer Trübung beträgt ebenfalls 600 W/m^2 [13]. Wenn dazu noch die Reflexion und die Absorption der transparenten Abdeckung des Wassers berücksichtigt werden, liegt der angenommene Wert für extraterrestrische Strahlung im visuellen Bereich unterhalb des möglichen Eintrages. Somit widerspricht diese Annahme nicht der Energiebilanz und ist daher zulässig.

Die Bildung eines Mittelwertes für den Absorptionskoeffizienten kommt nur bei der konstanten Belastungsstärke infrage. Dafür muss eine Funktion in Abhängigkeit von der Wellenlänge gebildet werden. Um dies zu umgehen, wird in der ersten und zweiten Variante die Absorption auf die Flächen

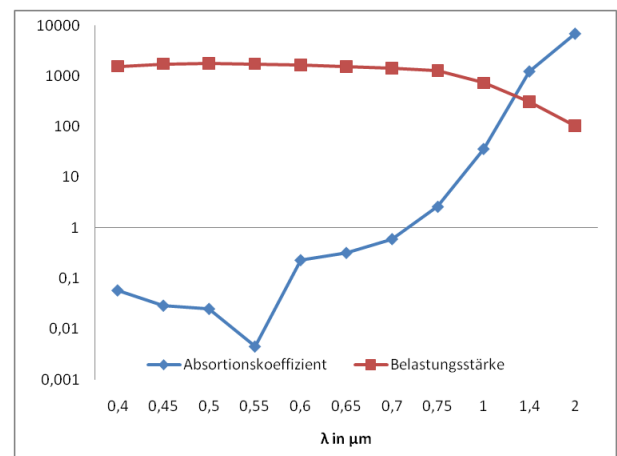


Bild 5 Absolutwerte der Belastungsstärke und des Absorptionskoeffizienten abhängig von der Wellenlänge

bezogen. Dazu wird die spektrale Belastungsstärke in 8 Wellenlängenbereiche mit einem Intervall von jeweils

$0,05 \mu\text{m}$, als Differenz zwischen den Messwerten unterteilt.

$$n = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{i} = 8 \quad (2.8)$$

Es werden sozusagen 8 Sonnenstrahlen mit dazugehörigen Wärmestromdichten und Absorptionskoeffizienten erzeugt.

1. Variante: Mittlere Wärmestromdichte

Angenommen, dass die Belastungsstärke im sichtbaren Wellenlängenbereich konstant wäre:

$$E_{\lambda,n} = \frac{1}{\Delta\lambda} * q = 1500 \frac{W}{m^2 \mu m} \quad (2.9)$$

mit $q = 600 \text{ W/m}^2$ aus der vorherigen Annahme. Somit beträgt jeder gedachte Sonnenstrahl im vorgegebenen Intervall eine mittlere Wärmestromdichte von $q_m = E_{\lambda,n} * 0,05 \mu m = q * 1/n = 75 \text{ W/m}^2$.

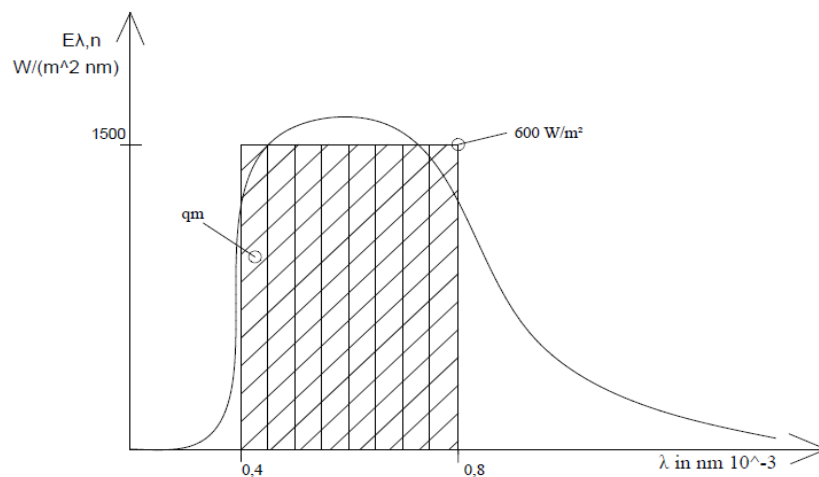


Bild 6 Angenommene konstante Belastungsstärke im visuellen Wellenlängenbereich

Die einzelnen Sonnenstrahlen werden nun über die Tiefe im Wasser absorbiert und zusammengefasst. Dabei wird jedem Sonnenstrahl unterschiedlicher Wellenlänge ein entsprechender Absorptionskoeffizient zugeordnet.

$$q_a = \sum_{i=1}^n (1 - e^{-k[i] * 1,86}) * q_m \quad (2.10)$$

Aus der absorbierten Strahlung erhält man durch die Umstellung nach k den mittleren oder gemeinsamen spektralen Absorptionskoeffizienten. In diesem Fall $k = 0,218 \text{ m}^{-1}$.

2. Variante: Analog zur extraterrestrischen Solarstrahlung

Um bessere Ergebnisse erreichen zu können, muss der tatsächliche Verlauf der Belastungsstärke berücksichtigt werden. Dazu wird zunächst der extraterrestrische Verlauf der Solarstrahlung ermittelt.

Wegen der großen Entfernung zwischen Sonne und Erde bildet die Solarstrahlung ein quasiparalleles Strahlenbündel. Die von der Erdatmosphäre noch nicht durch Streuung und Absorption geschwächte Strahlung wird extraterrestrische Solarstrahlung genannt.

Sie soll nun senkrecht auf eine Fläche treffen, die sich gerade außerhalb der Erdatmosphäre befindet. Der mittlere Abstand beträgt $R = 1,495 \cdot 10^{11}$ m; diese Entfernung wird als Astronomische Einheit (AE) bezeichnet[4]. Der Sonnenradius beträgt $R_s = 6,96342 \cdot 10^8$ m.

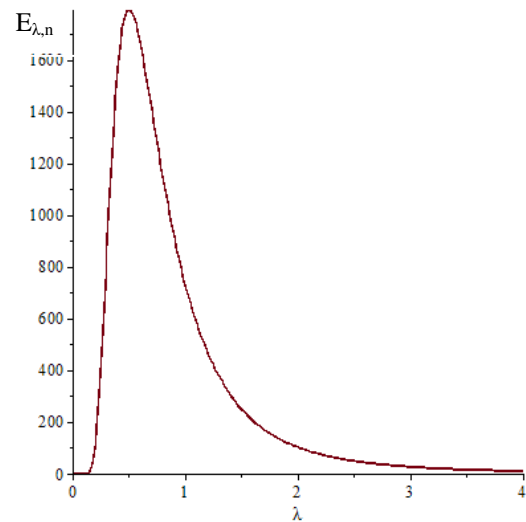


Bild 7 Verlauf der extraterrestrischen Solarstrahlung

Spektrale Bestrahlungsstärke:

$$E0 := \frac{\left(\frac{C1}{(\lambda \cdot 10^{-6})^5} \cdot \left(\frac{C2}{\lambda \cdot 10^{-6} \cdot T} - 1 \right) \right) \cdot 4 \cdot \pi \cdot (R_s)^2}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot 10^{-6} \quad (2.11)$$

Wobei die beiden Strahlungskonstanten C1 und C2 sich aus den fundamentalen Naturkonstanten der Lichtgeschwindigkeit C0 im Vakuum, der Planck-Konstante h und der Boltzmann-Konstante k zusammensetzen.

Als Nächstes wird angenommen, dass die Solarstrahlung am Erdboden E1 analog zur extraterrestrischen Solarstrahlung E0 im sichtbaren Wellenlängenbereich verläuft.

$$E1 = K * E0 = q = 600 \frac{W}{m^2} \quad (2.12)$$

Wobei die 600 W/m^2 einem Mittelwert der direkten Solarstrahlung an einem sonnigen Tag im Juni entsprechen.

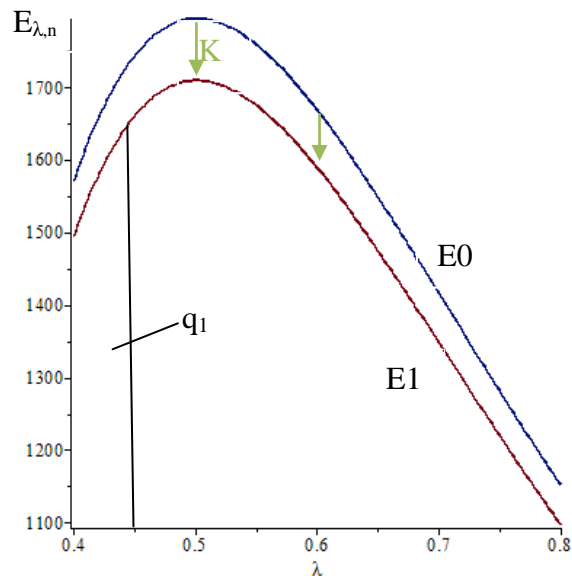


Bild 8 Verlauf der spektralen Bestrahlungsstärke außerhalb der Atmosphäre E0 und am Erdboden E1

Die einzelnen Wärmeströme im vorgegebenen Intervall von $0,05 \mu\text{m}$ setzen sich aus dem Flächenintegral zusammen.

$$q_i := \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{C1}{(\lambda \cdot 10^{-6})^5 \cdot \left(e^{\frac{C2}{\lambda \cdot 10^{-6} \cdot T}} - 1 \right)} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (R_s)^2 \right) \cdot 10^{-6} \cdot K d\lambda \quad (2.13)$$

Im Gegensatz zu der ersten Variante beinhaltet die angenommene, wellenlängenabhängige Strahlung nun unterschiedliche Wärmestromdichten. Ein Teil dieser Strahlung wird ebenfalls absorbiert. Die gesamte absorbierte Strahlung ist wieder die Summe einzelner Wärmestromdichten absorbiert mit den entsprechenden spektralen Absorptionskoeffizienten k_i .

$$q_a = \sum_{i=1}^n [(1 - e^{-k[i] \cdot 1,86}) * q_{[i]}] \quad (2.14)$$

Die Umstellung nach k

$$k := -0.5376344086 \ln \left(\frac{-1 \cdot qa + \sum_{i=1}^n q_i}{\sum_{i=1}^n q_i} \right) \quad (2.15)$$

ergibt einen Absorptionskoeffizienten von $k = 0,187 \text{m}^{-1}$. Die Abweichung zu der ersten Variante beträgt ca. 15%.

3. Variante: Herleitung des Absorptionskoeffizienten aus der Wärmetransportgleichung[5]

Die folgende partielle Differenzialgleichung beschreibt einen Wärmetransport mit den Prozessen der Wärmeleitung und Wärmestrahlung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{k * q}{\rho C} e^{-kx} \quad (2.16)$$

Da der Absorptionskoeffizient nicht von der Wärmeleitung abhängig ist, wird dieser Term mit der Annahme $a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{k * q}{\rho C} e^{-kx}$ und somit $a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll 1$ eliminiert. Die Wärmeleitung darf somit keinen Einfluss auf die Temperaturverteilung haben.

Die Temperaturverteilung hängt jetzt nur noch von der Wärmestrahlung ab:

$$T = \frac{k * q}{\rho C} e^{-kx} * t \quad (2.17)$$

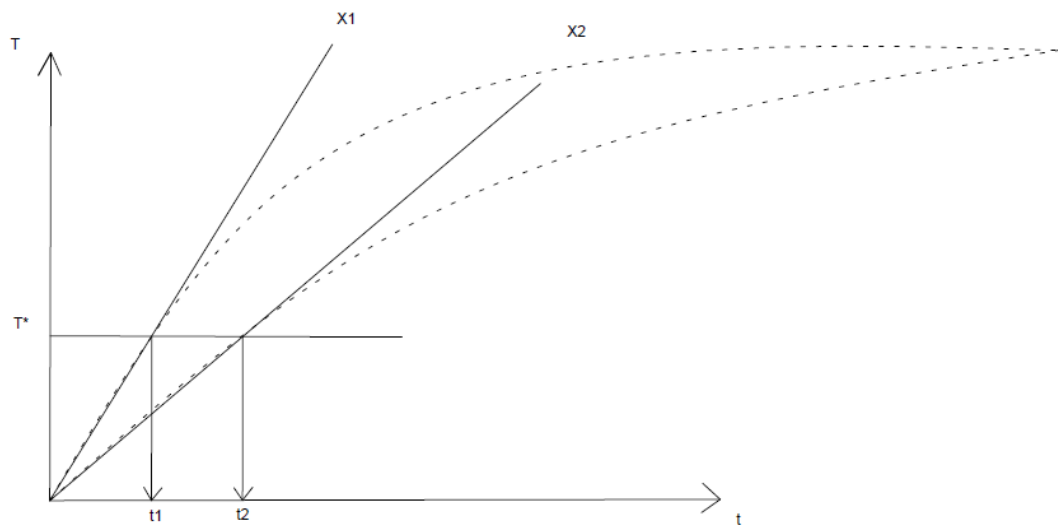


Bild 9 Exponentielle Erwärmung an zwei Punkten x_1 und x_2

Aus dem Diagramm geht hervor, dass an unterschiedlichen Punkten nach bestimmter Zeit, die gleiche Temperatur infolge der Wärmestrahlung erreicht wird.

Daraus folgt:

$$t_1 * \frac{q}{\rho C} e^{-kx_1} = t_2 * \frac{q}{\rho C} e^{-kx_2} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{e^{-kx_1}}{e^{-kx_2}} = e^{-kx_2+kx_1} \quad (2.18)$$

Somit erhalten wir einen Absorptionskoeffizienten

$$k = \frac{\ln t_1/t_2}{x_2 - x_1} \quad (2.19)$$

in Abhängigkeit von Ort und Zeit bei einer bestimmten Temperaturerhöhung.

Beispiel:

Es werden zwei Messpunkte bei 0,1 m und 0,2 m gewählt. Die Anfangstemperatur der beiden Messpunkte beträgt $T_0=10\text{ °C}$. Nach einer Stunde ($t_1=3600\text{s}$) wird am ersten Punkt die Temperatur mit $T=10,10\text{ °C}$ gemessen (bezogen auf die Annahmen in dieser Arbeit). Als Nächstes wird die Zeit gesucht, die benötigt wird, um dieselbe Temperatur im zweiten Messpunkt zu erreichen, in diesem Fall $t_2 = 3672,69\text{ Sekunden}$. Aus der Gleichung (2.19) erhalten wir einen Absorptionskoeffizienten von $0,2\text{m}^{-1}$.

Für den praktischen Fall sollte die Temperaturdifferenz zwischen T_0 und T möglichst hoch ausfallen, um den messtechnischen Fehler zu minimieren. Das bedarf einer hohen Intensität an Strahlung im visuellen Längenwellenbereich.

2.8 Absorptionsverhalten des Wassers

Die unten aufgeführte Tabelle zeigt das Absorptionsverhalten der direkten Solarstrahlung im Wasser, abhängig von der Tiefe. Insgesamt werden ca. 30 % der Strahlung bei einem Absorptionskoeffizienten von $0,187\text{m}^{-1}$ absorbiert. Es ist festzustellen, dass die exponentielle Absorption mit der Tiefe schwächer wird. Dies ist durch das Unterteilen der Absorptionstiefe in einzelne Schichten sichtbar.

Tabelle 2 Absorption im Wasser mit einem Koeffizienten k von $0,187\text{m}^{-1}$.

Tiefe im m in m	Gesamt Absorption $a=1-e(-k*L)$ in %	Abs.Koeffizient k in $1/\text{m}$	Absorption in einzelnen Schichten in %
0,1	1,85	0,187	1,85
0,2	3,67	0,187	1,82
0,3	5,46	0,187	1,78
0,4	7,21	0,187	1,75
0,5	8,93	0,187	1,72
0,6	10,61	0,187	1,69
0,7	12,27	0,187	1,66
0,8	13,89	0,187	1,63
0,9	15,49	0,187	1,60
1	17,06	0,187	1,57
1,1	18,59	0,187	1,54
1,2	20,10	0,187	1,51
1,3	21,58	0,187	1,48
1,4	23,03	0,187	1,45
1,5	24,46	0,187	1,43
1,6	25,86	0,187	1,40
1,7	27,23	0,187	1,37
1,8	28,58	0,187	1,35
1,9	29,90	0,187	1,32
Summe			29,90

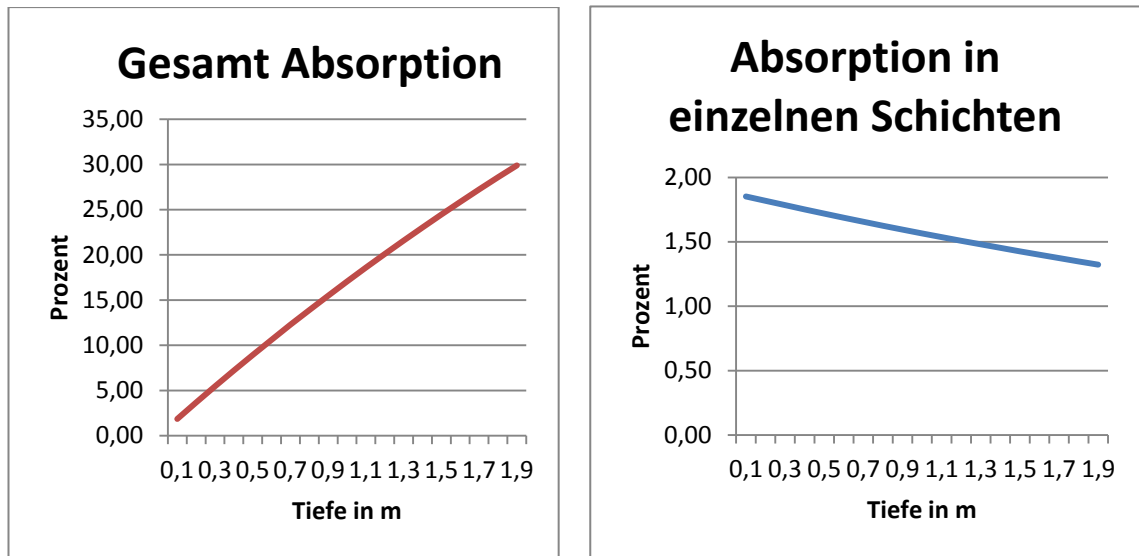


Bild 10 Verlauf der Strahlungsabsorption bei einem Absorptionskoeffizienten von $0,187 \text{ m}^{-1}$ im Wasserbehälter mit 1,86m Tiefe.

Zum Vergleich wird ein Absorptionsverhalten mit einem Absorptionskoeffizienten k von $2,5 \text{ m}^{-1}$ herangezogen. Es entspricht nahezu vollständiger Absorption der solaren Wärmestrahlung im Wasser bei einer Tiefe von 1,86 m.

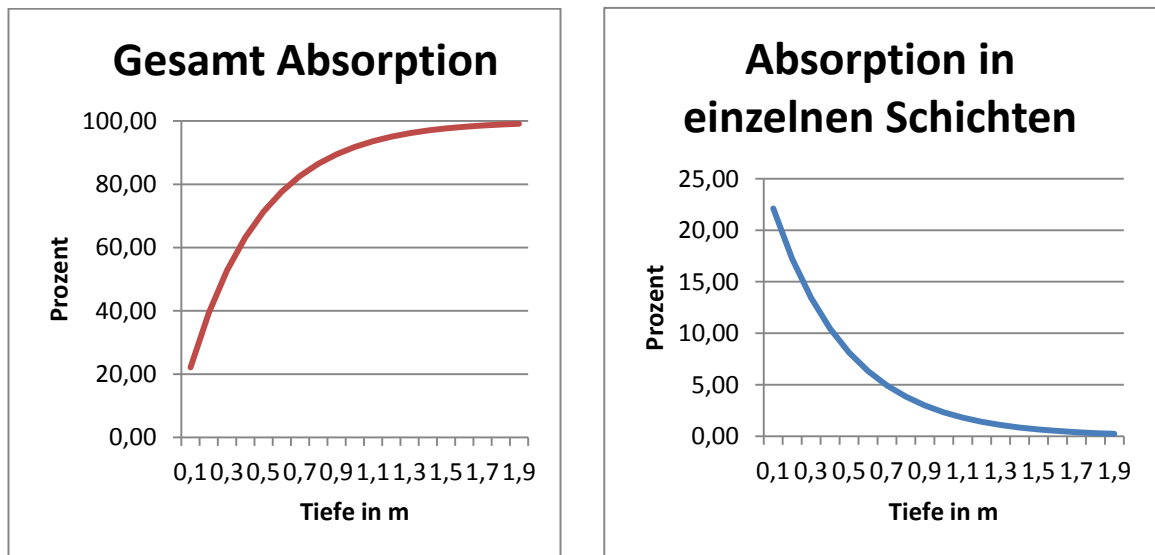


Bild 11 Verlauf der Strahlungsabsorption bei einem Absorptionskoeffizienten von $2,5 \text{ m}^{-1}$

3 Strömungsmechanik

Moderne CFD - Programme lösen im Allgemeinen fünf Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik [6]:

Massenerhaltung

Impulserhaltung in x-Richtung

Impulserhaltung in y-Richtung

Impulserhaltung in z-Richtung

Energieerhaltung

Es gibt zwei unterschiedliche Arten der Erhaltungsgleichungen, Differenzial- und Integralgleichungen. Bei der Differenzialform werden infinitesimal kleine Volumenelemente betrachtet. Dadurch sind die Strömungsgrößen differenzierbar und stetig. Die Integralform dagegen beschreibt ein endliches Kontrollvolumen und lässt Unstetigkeiten, die bei Verdichtungsstößen auftreten, in diesem zu. Die meisten CFD - Programme basieren daher auf der Finiten-Volumen-Methode.

Massenerhaltungsgleichung in Divergenzform:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho * \vec{u}) = 0$$

$$\text{Akkumulation} + \text{Konvektion} = 0$$

Massenerhaltungsgleichung in Integralform:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho * dV + \iint_S \rho * \vec{u} * dS = 0$$

mit

ρ = Dichte des Fluids

t = Zeit

\vec{u} = Strömungsgeschwindigkeiten

S = Oberfläche des Kontrollvolumens

4 Finite Volumen Methode

FVM ist ein numerisches Verfahren zur Approximation von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen. Dabei werden integrale Mittelwerte berechnet, die der Näherungslösung in jedem Gitterintervall gleich zu setzen sind. In diesem Zusammenhang spricht man von einer stückweise konstanten Rekonstruktion der Näherungslösung [7]. Auf die Herleitung der Gleichungen zu der Näherungslösung wird hier verzichtet und auf die zahlreiche Literatur zu dem Thema hingewiesen. Für den praktischen Anwender sind die Turbulenzmodelle von großer Bedeutung. Diese müssen den Gegebenheiten entsprechend richtig gewählt werden.

Turbulenzmodelle

Das **laminare Modell** beinhaltet keine Turbulenzen an den Grenzschichten zwischen Luft und Wand. Die Luft strömt in Schichten, die sich nicht miteinander vermischen. Meistens handelt es sich um eine stationäre Strömung.

Das **k-epsilon-Modell** ist ein Zweigleichungsmodell, das stabil ist und nur wenig zusätzlichen Rechenaufwand benötigt. Es beschreibt die Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie k und die turbulente Dissipation ε . Bei der Berechnung von Strömungen, die aufgrund von Druckunterschied an der Wand entstehen, hat das Modell Probleme [7]. Allerdings gibt es unter FLUENT sogenannte „Near-Wall Treatment“ Option. Hier kann man zwischen unterschiedlichen Wandfunktionen auswählen. Voreingestellt ist die „Standard Wall“ Funktion, mit welcher in diesem Fall gerechnet wird.

Das **k-omega-Modell** verwendet anstelle der Dissipation die turbulente Frequenz ω . Dadurch wird zwar ein genaueres Ergebnis in der Wandnähe erreicht als mit k- ε -Modell, im Inneren des Strömungsfeldes sind die Ergebnisse jedoch ungenauer [7].

SST-Modell (Shear-Stress-Transport) kombiniert die Eigenschaften des k - ω -Modells in Wandnähe mit Eigenschaften des k - ε -Modells im restlichen Strömungsfeld. Das SST-Modell ist robust, liefert genauere Ergebnisse und wird als Standard-Turbulenzmodell für industrielle Anwendungen verwendet [7].

5 Software

Die numerischen Simulationen wurden in dieser Arbeit mit der Software FLUENT von ANSYS durchgeführt.

5.1 ANSYS

ANSYS ist ein Software-Paket zur Lösung technischer und wissenschaftlicher Probleme in der ingenieurmäßigen Entwicklungs- und Konstruktionsphase. Es ist eines der führenden CAE- und Multiphysik-Programme mit den Schwerpunkten in der Strukturmechanik und in der Strömungssimulation.

5.2 ANSYS-Produktportfolio

ANSYS zeichnet sich besonders durch seine Multiphysikfähigkeit aus. Es können neben der Mechanik und Temperaturfeldern ebenso Strömung, Akustik und Elektromagnetik simuliert werden. Auch die gleichzeitige gekoppelte Behandlung dieser physikalischen Vorgänge in einer Simulation ist möglich.

Die mechanischen Analysefähigkeiten von ANSYS umfassen neben der linearen Festigkeit und Dynamik die Palette der nichtlinearen Problemstellungen, wie z. B. große Verformungen, plastische Dehnungen, vielfältige Materialgesetze, Kontakt inkl. Reibung, Dämpfung und nichtlineare Stabilitätsbetrachtungen [8].

Die thermofluidischen Analysefähigkeiten von ANSYS umfassen den stationären und transienten Wärmeaustausch, inkl. der Analyse von Rohrleitungssystemen. Unter CFX und FLUENT können Strömungsvorgänge im kompressiblen und inkompressiblen Bereich, Wärmeaustausch zwischen Fluid- und Festkörper, Mehrkomponenten-Strömungen, Vorgänge an sich gegeneinander bewegenden Bauteilen sowie Fluidbewegungen an freien Oberflächen betrachtet werden[9].

Die elektromagnetischen Analysefähigkeiten unter ANSYS umfassen DC, AC und transiente Anregung beliebiger Form im Niederfrequenzbereich, sowie auch dem Hochfrequenzbereich. Simulationsfeatures, wie nichtlineare Permeabilität, temperaturabhängige Stoffeigenschaften, Permanentmagnete und Schaltkreis (Circuit) Elemente sind ebenfalls enthalten [9].

Zur Geometrieerstellung und Vernetzung stellt ANSYS spezielle Softwaremodule zur Verfügung und beschleunigt dadurch den gesamten Arbeitsprozess der Simulation.

Anwendungsbreite:

- Strukturmechanik
- Strömungsmechanik
- Temperaturfelder
- Elektromagnetik
- Multiphysik

5.3 Simulationsumgebung

Durch die Übernahmen andere Softwareanbieter entwickelten sich mehrere eigenständige Simulationsumgebungen, die unabhängig voneinander verwendet werden können.

ANSYS Classic

ANSYS Classic bildet den Kern der Software. Hier sind umfangreiche Analysen mittels unterschiedlicher Elemente möglich. Die Elemente unterscheiden sich durch die Ansatzfunktionen. Zur Auswahl stehen Elemente für die Berechnung von Struktur, Temperatur, elektrostatischer Felder, Magnetfelder, Fluidodynamik [10].

Fluid Dynamics

Fluiddynamische Analysen können mit verschiedenen Softwarepaketen durchgeführt werden. Der Unterschied besteht in der Anwendbarkeit der Strömungssimulation, wenn z. B. die Strömung nur eine Nebenrolle spielt und die vereinfachten Annahmen zur Strömungssimulation ausreichen. So können innerhalb des klassischen ANSYS Programms Fluidelemente verwendet werden. Für umfangreiche Analysen stehen weitere Programme zu Verfügung [10].

1. Möglichkeit: Fluidanalysen unter ANSYS Classic mit Fluidelementen

Vorteile:	-schnelle und einfache Anwendung -Kopplung mit anderen Elementen
Nachteile:	-stark vereinfachte, eingeschränkte Analyse

2. Möglichkeit: CFD FLOTTRAN Modul

- Vorteile:
- im ANSYS-Programm vollständig integriert
 - schreibt und liest Dateien ohne Übersetzungsprogramm
- Nachteile:
- wird nicht weiter entwickelt

3. Möglichkeit: CFX Softwarepaket

- Vorteile:
- umfangreiche Fluidanalyse
 - Weiterentwicklung von physikalischen Modellen und numerischen Methoden

4. Möglichkeit: FLUENT Softwarepaket

- Vorteile:
- umfangreiche Fluidanalyse
 - „modellspezifische Add-On Routinen”¹

ANSYS Workbench

ANSYS Workbench ist ein Simulationswerkzeug, mit welchem die Geometrie und die Vernetzung für sämtliche physikalischen Simulationsdisziplinen in einer Umgebung vorbereitet werden können. Durch Schnittstellen zu diversen CAD-Systemen soll die Erstellung komplexer Geometrien vereinfacht werden. Zum Funktionsumfang gehören die Statik, die Modalanalyse zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen, Temperaturfelder und Thermospannungen. Die Materialauswahl, die Festlegung der Randbedingungen und die Belastung übernimmt der Workbench Assistent.

¹ Quelle: aixprocess gmbh, Alfonsstraße 44, 52070 Aachen www.aixprocess-gmbh.de

5.4 Analoge Anwendungsbereiche

Unter bestimmten Annahmen können auch physikalische Probleme gelöst werden, die eine Analogie zu den vorhandenen Differenzialgleichungen aufweisen. Als Grundlage für stationäre Temperaturfelder dient die umgeformte Differenzialgleichung [10]:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = -q''' \quad (5.1)$$

mit

λ	Wärmeleitfähigkeit (W/m K)
T	Temperatur (K)
q'''	innere Wärmeerzeugungsrate (W/m ³)
∇	Nabla-Operator

Folgende Beispiele liegen für die analoge Anwendung zugrunde:

Diffusion

Die grundlegende Differenzialgleichung für die Diffusion liefert das 2. Fick'sche Gesetz:

$$\nabla(D \nabla c) = \frac{\partial c}{\partial t} \quad (5.2)$$

mit

D	Diffusionskoeffizient (m ² /s)
c	Stoffmengenkonzentration (mol/m ³)
t	Zeit

Mit dieser Gleichung können nur Ausgleichsvorgänge zwischen Bereichen unterschiedlicher Konzentration betrachtet werden.

Sickerströmung

Differenzialgleichung für Sickerströmung lautet:

$$\nabla(k\nabla H) = -Q \quad (5.3)$$

mit

k	Permeabilität der Transmissivität
H	Porendruck
Q	Durchflussleistung

Ob die Lösung analoger Differenzialgleichungen ausreichende Ergebnisse liefert und ob weitere analoge Anwendungsbereiche für bauphysikalische Prozesse möglich sind, ist noch zu überprüfen.

6 Strömungsmechanik mit FLUENT

ANSYS FLUENT steht innerhalb der ANSYS Workbench für die Strömungssimulation zur Verfügung. Es ist eines der führenden CFD-Softwarepakete. Mit FLUENT können wärmetechnische Vorgänge im vollen Umfang, gekoppelt mit der Strömungsmechanik simuliert werden [9].

Berechnungsmöglichkeiten

- Stationäre und transiente Vorgänge
- Inkompressible und kompressible Modelle
- Wärmeübertragung
- Laminare und turbulente Strömung
- Poröse Medien
- Mehrkomponentenströmung
- Bewegte Wände
- Parallelisierung (Add-Ons)
- Akustik

Stoffeigenschaften

- Gase und Flüssigkeiten
- Realgasverhalten
- Nicht-Newtonsche Fluide
- Temperatur- und druckabhängige Eigenschaften

Turbulenzmodellierung

- Eingleichungsmodelle
- Zweigleichungsmodelle (k-e, k- ω , SST)
- Reynolds-Spannungsmodelle
- Turbulenz auflösende Modelle (LES, DES,)
- Laminar-turbulente Wechselwirkung

Mehrphasenströmungen

FLUENT beinhaltet Modelle für allgemeine Gas-Flüssigkeits-Strömungen, Feststoffpartikelströmungen, Tröpfchenströmungen und Blasenströmungen. Damit können Phasenübergänge, wie Kondensation und Verdampfung, berücksichtigt werden.²

Wärmeübertragung und Strahlung

- Wärmeleitung in Festkörpern
- Freie und erzwungene Konvektion
- Strahlung zwischen absorbierenden und nicht-absorbierenden Oberflächen
- Strahlungsabsorption in der Gasphase

Verbrennung

- Gasverbrennung
- Feststoffverbrennung
- Flammenberechnung

² Quelle: <http://www.cadferm.de/produkte/ansys/stroemungsmechanik.html>

7 Validierung

Komplexe numerische Simulationen sind stets mit Fehlern behaftet. Diese sind in zwei Kategorien unterteilt [11]:

- Modellfehler
- Numerischer Fehler

Mit Modellfehler ist die Abweichung der Anfangs- und Randbedingungen zu realen Gegebenheiten gemeint. Numerische Fehler entstehen durch die Näherungslösung der Differenzialgleichungen. Um den Modellfehler zu minimieren, ist eine Modellvalidierung sinnvoll.

In der numerischen Berechnung unterscheidet man zwischen der Validierung und der Kalibrierung. Bei der Validierung werden mathematisch-physikalische Modelle auf Ihre Übereinstimmungen mit den Experimenten verglichen. Bei der Kalibrierung werden dagegen zur Verfügung stehende Parameter für die jeweiligen Prozesse so verändert, dass eine bestmögliche Übereinstimmung mit dem Experiment erreicht wird. In dieser Arbeit erfolgt die strenge Trennung zwischen Validierung und Kalibrierung nicht. Die Ergebnisse werden mit vorhandenen analytischen Lösungen verglichen. Dafür wird das Modell zunächst stark vereinfacht.

7.1 Annahmen für die Validierung

Konstante Wärmestromdichte

Zum Anfang der Modellierung wird ein Tagesgang (Juni, Tag 174) der Gesamtstrahlungswärmestromdichte mit max. 800 W/m^2 angenommen. Aus dem Flächenintegral wird eine konstante, mittlere Wärmestromdichte von $600 \text{ W/m}^2 \cdot \text{d}$ berechnet. Die Reflexion, Absorption

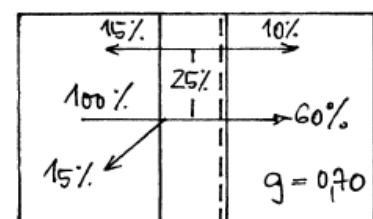


Bild 12: Beispielhafte Darstellung der Zusammensetzung des g -Wertes.

sowie Transmission ist mit einem g-Wert von 0,6 aus der Tabelle 3 zu berücksichtigen. Somit ergibt sich eine Sonneneinstrahlung von 360 W/m^2 . Die Wärmeabgabe nach außen durch die Glasscheibe wird bei der Validierung nicht berücksichtigt.

Tabelle 3 Herstellerangaben zu den Eigenschaften der Wärmeschutzgläser

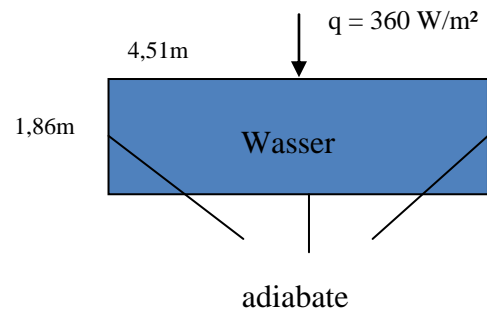
Beispiele für Wärmeschutz- und Sonnenschutzgläser									
	Firma	Ausführung	Aufbau s/SZR/s	Elementdicke	Lichtdurchlässigkeit τ_L	Gesamtenergiedurchlassgrad g	shading coefficient $b=g/0,8$	Selektivität $S = \tau_L/g$	Wärmedurchgangskoeffizient U_V nach Prüfungszeugnis $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$
			mm	mm	%	%	–	–	
Wärmeschutzgläser									
Climaplust 1,6	SGG	B,L	4/12/4	20	77	62	0,78	–	1,8
Climaplust 1,6	SGG	B,L	6/15/6	27	75	60	0,75	–	1,6
Climaplust KR	SGG	B,G	6/15/6	27	76	60	0,75	–	1,1
Climatop V	SGG	B,G	4/12/4/12/4	36	66	45	0,56	–	0,5
Tristar V	SGG	VSG,B,G	10/15/4	29	74	50	0,63	–	1,1
Thermoplust	Pi	B,L	4/12/4	20	76	64	–	–	1,8
Thermoplust	Pi	B,L	4/16/4	24	76	64	–	–	1,6
Thermoplust S2	Pi	B,G	4/16/4	24	71	55	–	–	1,0
iplust neutral S	Ip	B,G	4/12/4	20	81	64	–	–	1,3
iplust reno S	Ip	B,G	4/18/4	26	81	64	–	–	1,3
iplust 2S	Ip	2xB,G	6/14/6	26	78	55	–	–	1,1
iplust CS	Ip	2xB,G	6/16/6	28	79	63	–	–	1,0
iplust 3CS	Ip	2xB,2xG	4/12/4/12/4	36	72	52	–	–	0,5

Weitere Annahmen:

- konstanter Wärmestrom, bis die Temperatur des Wassers von 10°C auf 30°C erwärmt wurde
- keine Wärmeverluste durch die Konstruktion
- es wird nur die direkte Solarstrahlung in sichtbaren Wellenlängenbereich betrachtet
- Temperaturabhängigkeit der Stoffeigenschaften, wie Wärmeleitfähigkeit wird nicht berücksichtigt

7.2 Berechnungsparameter

- $\lambda = 0,63 \text{ W/(m}^*\text{K)}$
- $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ bei ca. 20°C
- $C_p = 4180 \text{ J/(kg}^*\text{K)}$
- $L = 1,86 \text{ m}$
- $q = 360 \text{ W/m}^2$
- $T_0 = 10^\circ\text{C}$



Temperaturerhöhung:

10°C auf 30°C

Volumen:

$4,51 \text{ m} * 1,86 \text{ m} * 1 \text{ m} = 8,4 \text{ m}^3$

Benötigte Wärme:

$Q = m * C_p * \Delta T = 195 \text{ KWh}$

Wärmestrom:

$Q_s = 4,51 \text{ m}^2 * 360 \text{ W/m}^2 = 1,62 \text{ KW}$

Dauer:

120 Stunden

Mit dieser Zeitspanne wird in den nächsten Schritten gerechnet. Dies entspricht einer Erwärmung des Wassers um 20°C ohne Verluste in 10 Tagen je 12 Stunden mit klarem Himmel und keiner Trübung.

7.3 Ergebnisse der analytischen Berechnung der 1D Wärmeleitung

Die partiellen Differenzialgleichungen können mit unterschiedlichen Verfahren annähernd gelöst werden. In diesem Fall liegt eine Lösung für eindimensionale Wärmeleitung (2.4) mit *Kosinus Transformation* vor [5].

Mit folgenden Randbedingungen:

$$-\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} T(x, \tau) \right) \bigg|_{x=0} = q \rightarrow \text{Wärmestromdichte an der Oberfläche} \quad (7.1)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial}{\partial L} T(L, \tau) \right) = 0 \rightarrow \text{adiabate Grenzen} \quad (7.2)$$

erhält man aus der Fourier-Kosinus-Transformation [5]

$$\theta := \frac{\lambda(T - T_0)}{q \cdot L} = Fo + \frac{\left(3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{6 \cdot x}{L} + 2 \right)}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{2}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{(-n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo)} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \quad (7.3)$$

wobei

$$Fo := \frac{a \cdot \tau}{L^2} \quad (7.4)$$

Die Umstellung nach Temperatur ergibt:

$$T := \frac{1}{\lambda} \left(\left(Fo + \frac{\left(3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{6 \cdot x}{L} + 2 \right)}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{2}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{(-n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo)} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right) \cdot qn \cdot L \right) + T_0 \quad (7.5)$$

Mit Hilfe von Softwarepaket Maple wird die Aufgabe gelöst. Dazu werden, wie in der Aufgabenstellung 120 Stunden für die Dauer der Wärmezufuhr angesetzt.

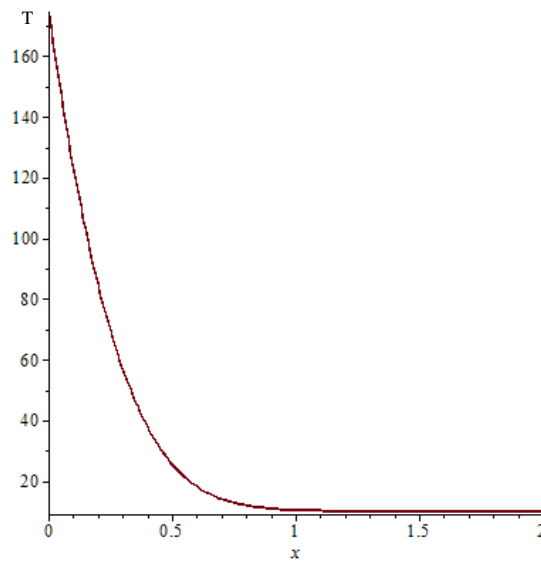


Bild 13 Temperaturverlauf nach 432000 sek.:
Linke Achse zeigt die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$, rechte
Achse stellt die Höhe in m dar

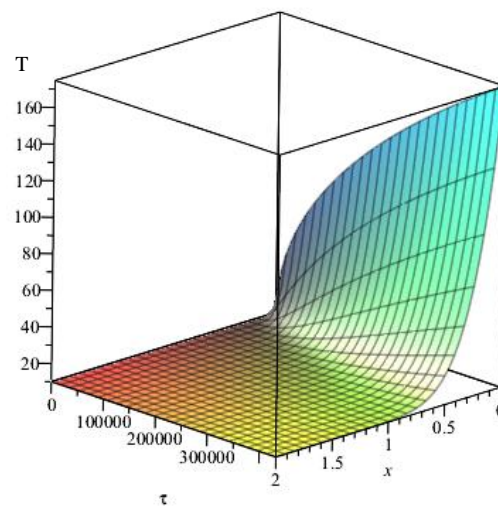


Bild 14: Zeigt den Temperaturverlauf im 3D-
Plot nach 432000 Sekunden

Kontrolle

Die Kontrolle erfolgt mit Hilfe mittlerer Temperatur in der Zeit von $\tau = 0$ bis 432000 sek. berechnet aus der Mittelwertbildung:

$$\frac{1}{1.86} \int_0^{1.86} \frac{1}{\lambda} \left(\left(Fo + \frac{\left(3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{6 \cdot x}{L} + 2 \right)}{6} - \frac{2}{\pi^2} \cdot e^{(-\pi^2 \cdot Fo)} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \right) \cdot q \cdot L \right) + T_0 dx \quad (7.6)$$

Die mittlere Wassertemperatur beträgt nach 120 Stunden **30,04 °C**.

7.3.1 Ergebnisse der numerischen Berechnung der 1D Wärmeleitung mit FLUENT

Für die numerische Lösung wird die CFD-Software FLUENT von ANSYS verwendet.

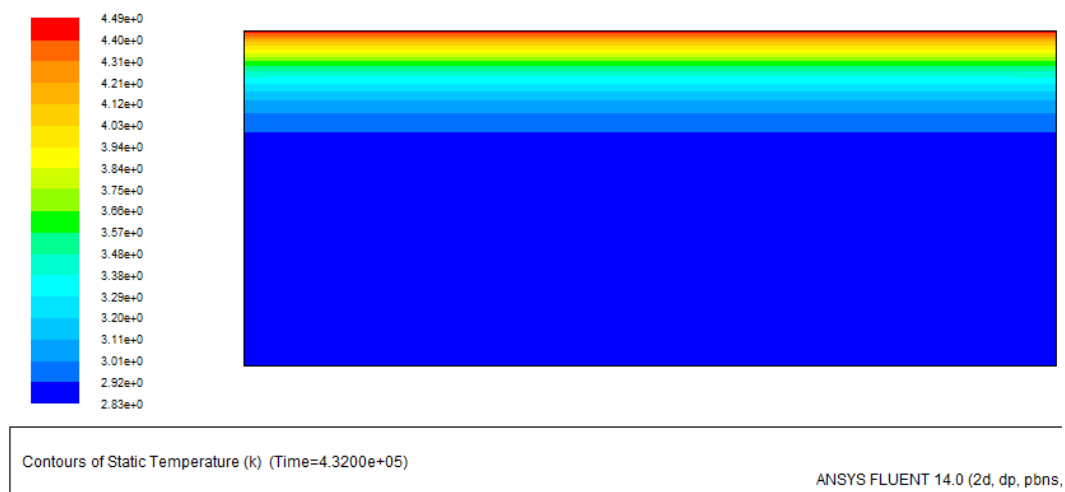


Bild 15 Temperaturschichtung im Festkörper mit Wärmeleitfähigkeit und spez. Kapazität des Wassers

Mittlere Wassertemperatur: 302.32 K → **29, 17°C**

Maximale Wassertemperatur: 448.87 K → **175, 72°C**

7.3.2 Direkter Vergleich

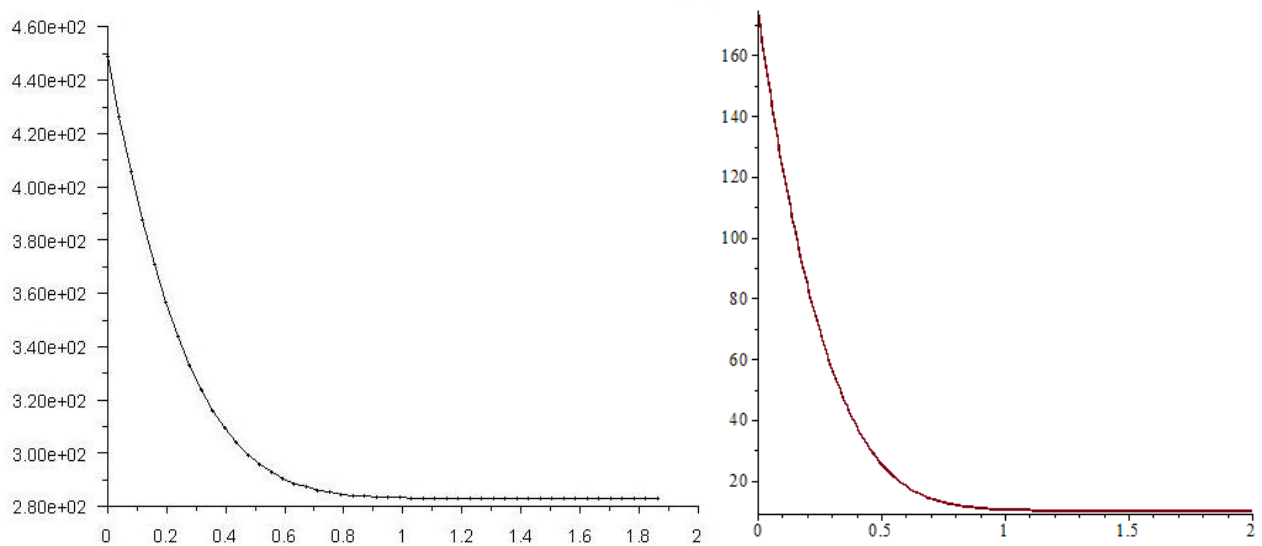


Bild 16: Zeigt Temperaturverlauf über die Höhe des Speichers, Schnitt in der Mitte. Links die Berechnungen mit Fluent, die Temperatur an der Oberfläche beträgt $175,72\text{ °C}$. Rechts ist die analytische Berechnung mit Maple, die Temperatur bei $x=0$ beträgt $174,69\text{ °C}$.

Fazit

Die Berechnungen mit Wasser als strahlungsundurchlässiger Festkörper zeigen, dass die Wärme sich im oberen Bereich des Behälters staut. Dies hängt damit zusammen, dass die Wärmeleitfähigkeit des Wassers gering ist. Die maximal errechneten Temperaturen sind jedoch viel zu groß und weit über den Siedepunkt. Im nächsten Schritt soll daher die Wärmestrahlung berücksichtigt werden.

7.4 Ergebnisse der analytischen Berechnung der Wärmetransportgleichung

Das Temperaturfeld $T(x, \tau)$ in einem strahlungsdurchlässigen Körper kann durch die gegebene partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T(x, \tau) = a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, \tau) \right) + \frac{k q e^{-kx}}{c} \quad (7.7)$$

mit Randbedingungen

$$-\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} T(x, \tau) \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.8)$$

und

$$-\lambda \left(\frac{\partial}{\partial L} T(L, \tau) \right) = 0 \quad (7.9)$$

berechnet werden.

Lösung aus der *Fourier-Kosinus-Transformation* [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(T - T_0)}{qL} = & (1 - e^{-b}) \left(Fo + \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \\ & - \frac{e^{-\frac{bx}{L}}}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{2b^2 \left((-1)^n e^{-b} - 1 \right) e^{-n^2 \pi^2 Fo} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{(b^2 + n^2 \pi^2) n^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Es ist ganz wichtig zu bemerken, dass die Randbedingung an der Grenze $x = L$ gleich null ist, d. h. dass bei einem geringen spektralen Absorptionskoeffizienten der Anteil der Strahlung, die nicht absorbiert wird, aus dem System verschwindet.

Bei einem Reintransmissionsgrad

$$\tau_i = \exp(-0,187m^{-1} * 1,86) = 0,706$$

wird nur 30 % der Wärmestrahlung vom Wasser absorbiert. Die restliche Strahlung dringt somit auf den Grund des Speichers und wird je nach Beschaffenheit vom Grund absorbiert und reflektiert. Da diese Vorgänge in der Randbedingung nicht berücksichtigt sind, kann die oben aufgeführte Lösung der partiellen Differenzialgleichung nur bei einem spektralen Absorptionskoeffizienten von $k > 2,5m^{-1}$ und einer Tiefe von 1,86m verwendet werden.

$$a = 1 - e^{-k*L} = 100\%$$

Bei $k = 2,5m^{-1}$ ist der Reintransmissionsgrad 0,9 %.

$$\tau_i = \exp(-2,5m^{-1} * 1,86) = 0,00956$$

Die Strahlung wird nahe zu vollständig absorbiert. Die Verluste im System sind minimal.

Aus der zeitlichen Mittelwertbildung mit dem Integral

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\lambda} \left(\left((1 - e^{-b}) \cdot \left(Fo + \frac{\left(3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right)}{6} + \frac{1}{b^2} \right) \right. \right. \\ & \quad + \frac{\left(1 - \frac{2x}{L} \right)}{2} - \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{b \cdot x}{L}} + \frac{2b^2}{(b^2 + \pi^2) \cdot \pi^2} \cdot ((-1) \cdot e^{-b} - 1) \\ & \quad \left. \left. \cdot e^{-\pi^2 \cdot Fo} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L} \right) \right) \cdot q \cdot L \right) + T_0 dx \end{aligned} \quad (7.11)$$

erhält man nach 120 Stunden ($\tau = 432000$) eine mittlere Wassertemperatur von:

$$29,989 \text{ } ^\circ\text{C}$$

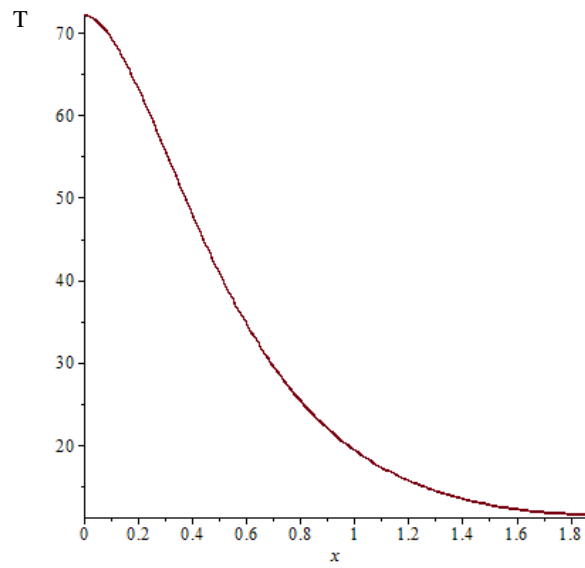


Bild 17 Temperaturverlauf mit kurzweilliger Wärmestrahlung

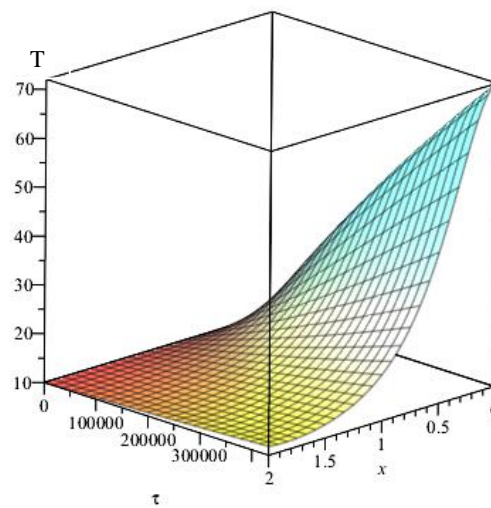


Bild 18 Temperaturverlauf in Abhängigkeit von Ort und Zeit

7.4.1 Wärmestrahlung mit FLUENT

Die Strahlungstransportgleichung (**R**adiative **T**ransfer **E**quation) im FLUENT für ein absorbierendes, emittierendes und streuendes Medium an Position \vec{r} in Richtung \vec{s} lautet:

$$\frac{dI(\vec{r}, \vec{s})}{ds} + (a + \sigma_s) I(\vec{r}, \vec{s}) = an^2 \frac{\sigma T^4}{\pi} + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^{4\pi} I(\vec{r}, \vec{s}') \Phi(\vec{s} \cdot \vec{s}') d\Omega' \quad (7.12)$$

mit:

\vec{s}' = scattering direction vector

s = path length

a = absorption coefficient

n = refractive index

σ_s = scattering coefficient

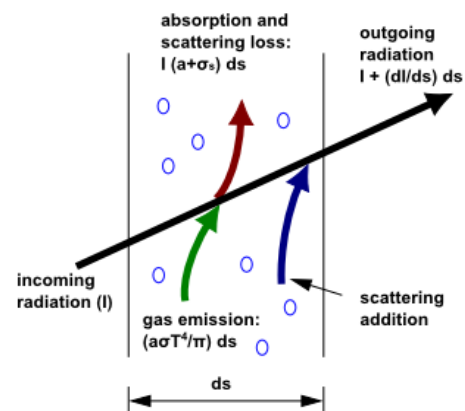
σ = Stefan-Boltzmann constant ($5.669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$)

I = radiation intensity, which depends on position (\vec{r}) and direction

T = local temperature

Φ = phase function

Ω' = solid angle



P-1 Strahlungsmodell –Theorie

Das P-1 Strahlungsmodell ist der einfachste Fall des allgemeineren PN-Modell, das auf dem Ausbau der Strahlungsintensität in eine Reihe von orthogonalen Kugelflächenfunktionen basiert³.

Für den Strahlungsfluss wird folgende Gleichung verwendet:

$$q_r = - \frac{1}{3 (\alpha + \sigma_s) - C\sigma_s} \nabla G \quad (7.13)$$

G = einfallende Strahlung

C = lineare anisotropen Phase Funktionskoeffizient

Der Strahlungsfluss an der Wand wird mit der folgenden Randbedingung beschrieben:

$$I_w(\vec{r}, \vec{s}) = f_w(\vec{r}, \vec{s}) \quad (7.14)$$

$$f_w(\vec{r}, \vec{s}) = \epsilon_w \frac{n^2 \sigma T_w^4}{\pi} + \rho_w I(\vec{r}, -\vec{s}) \quad (7.15)$$

Mit der „Marshak“-Randbedingung wird die Winkelabhängigkeit eliminiert und man erhält folgende Gleichung:

$$q_{r,w} = - \frac{4\pi\epsilon_w \frac{n^2 \sigma T_w^4}{\pi} - (1 - \rho_w) G_w}{2(1 + \rho_w)} \quad (7.16)$$

Dabei stellt ρ_w die Wandreflexion dar.

³ Quelle: ANSYS Help / Theory Guide: 0 / 5. Heat Transfer / 5.3. Modeling Radiation / 5.3.3. P-1 Radiation Model Theory

7.4.2 Ergebnisse der numerischen Berechnung mit der Wärmestrahlung

Ergebnisse mit Absorptionskoeffizienten $k = 2,5\text{m}^{-1}$

Mittlere Wassertemperatur: 302,79 K → **29,64°C** (Volume-Weighted Average)

Oberflächentemperatur: 353,98 K → 80,83°C

Minimale Wassertemperatur: 286,59 K → 13,45°C

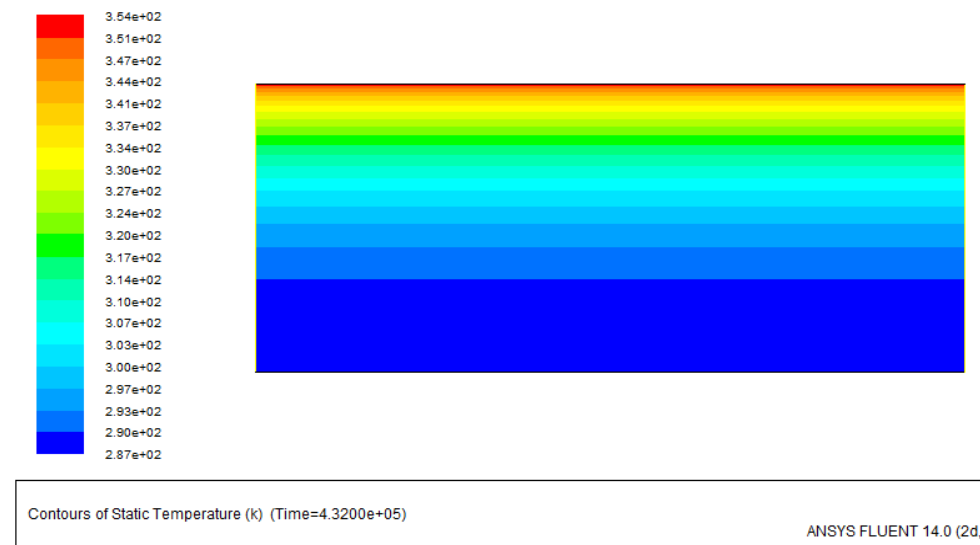


Bild 19 Temperaturschichtung bei nahezu vollständiger Absorption der Wärmestrahlung mit einem Absorptionskoeffizienten von $2,5\text{ m}^{-1}$

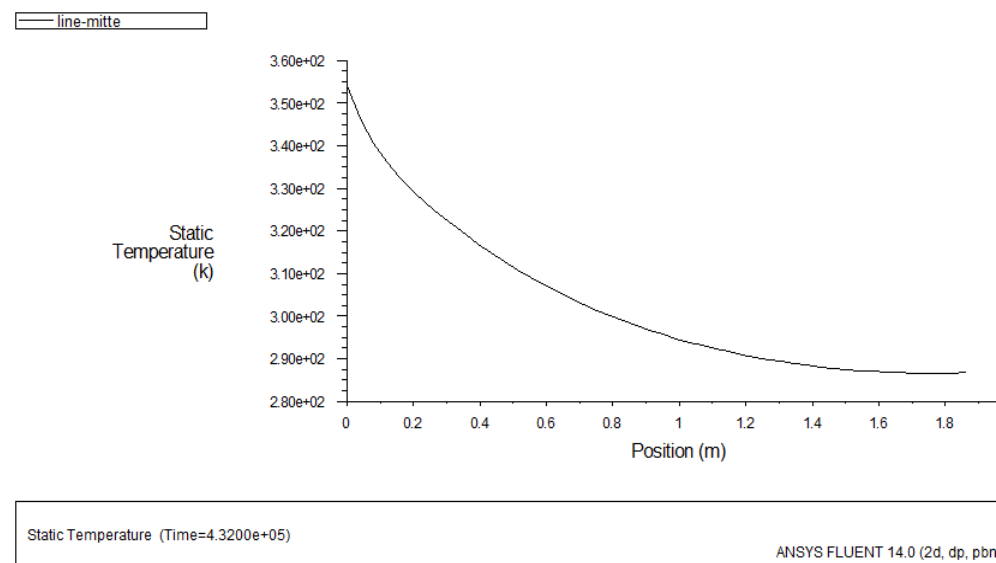


Bild 20 Temperaturverlauf über die Höhe des Speichers bei nahezu vollständiger Absorption der Wärmestrahlung

Ergebnisse mit Absorptionskoeffizienten $k = 0,187\text{m}^{-1}$

Mittlere Wassertemperatur: 301,56 K → **28,41°C** (Volume-Weighted Average)

Oberflächentemperatur: 340,92 K → 67,77°C

Minimale Wassertemperatur: 293,53 K → 20,38°C

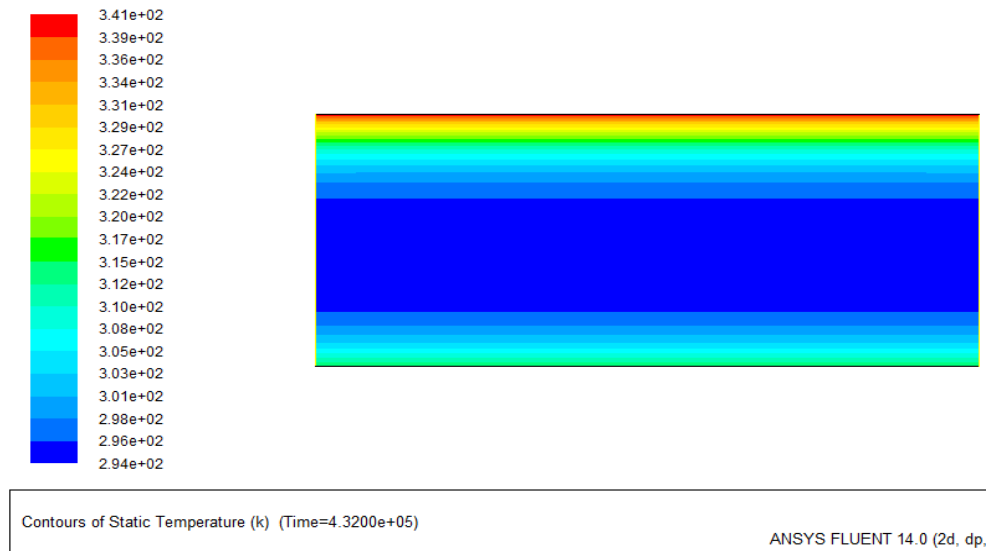


Bild 21: Zeigt die Temperaturschichtung im unteren Bereich des Speichers. Diese entsteht einerseits durch die reflektierte Strahlung bei einem Emissionsgrad von 0,9, andererseits durch die Wärmeleitung, nach dem der Boden des Speichers durch absorbierte Wärmestrahlung erwärmt wurde.

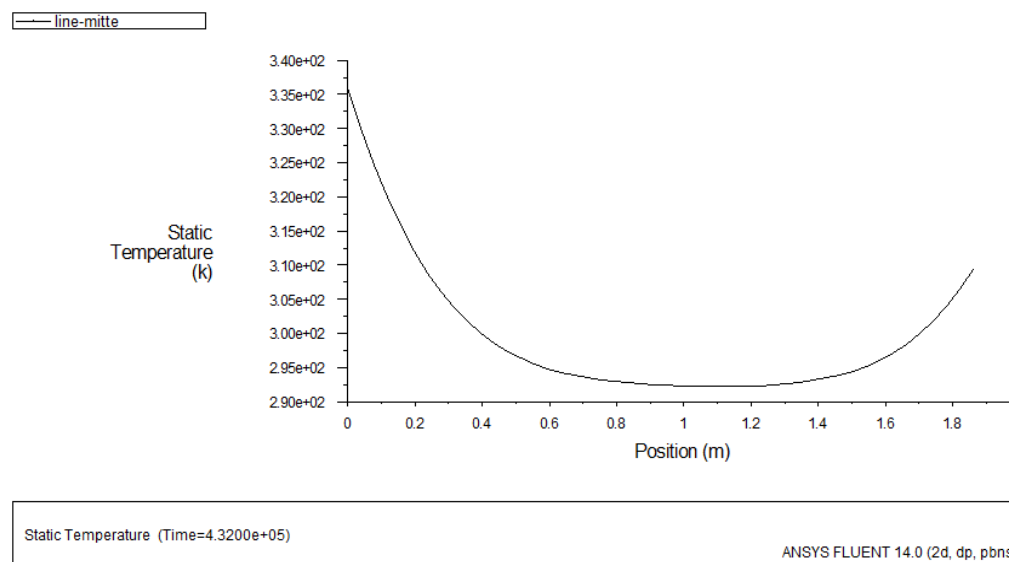


Bild 22: Zeigt die Temperaturerhöhung im unteren Bereich des Speichers

Fazit

Die Berechnungen mit Wärmeleitung und der kurzwelligen Wärmestrahlung zeigen deutlich bessere Ergebnisse als die Berechnungen mit reiner Wärmeleitung. Bei hoher Transmission der Wärmestrahlung bildet sich am Boden des Speichers eine höhere Temperatur als in der Mitte. Dadurch wird ein Auftrieb des Wassers hervorgerufen.

Aufgrund der Strahlungstransportgleichung im FLUENT erreicht weniger Strahlung den Grund des Speichers als angenommen ($\tau_i = 70\%$). Die Transportgleichung beinhaltet keine exponentielle Funktion. Die in den Randbedingungen vorgegebene Energie wird als Abstrahlung in Abhängigkeit von Faktoren, wie Brechung, Absorption und Streuung abgegeben.

8 Berücksichtigung der Wärmeverluste durch die Konstruktion

Durch die Außenwände wird Wärme nach außen abgegeben. Aus der mittleren Wassertemperatur können diese Verluste ermittelt werden. Dazu wird folgender Aufbau des Speichers angenommen:

Tabelle 4 Angenommene Wandkonstruktion für den schwimmenden Warmwasserspeicher[1]

Material von innen nach außen	Rohdichte Kg/m ³	Wärmeleitfähigkeit W/(m*K)	Spez. Wärmekapazität J/(Kg*K)	Wanddicke mm
Edelstahl	7900	15	480	10
Dämmung	35	0,03	1250	100
Porenbeton	500	0,12	1000	90
Isolierung	30	0,04	1200	40

Die Simulation erfolgt zunächst mit einem 2-D Modell. Die Temperaturverteilung ist somit nicht mehr 1-dimensional, sondern ändert sich in vertikale und horizontale Richtung.

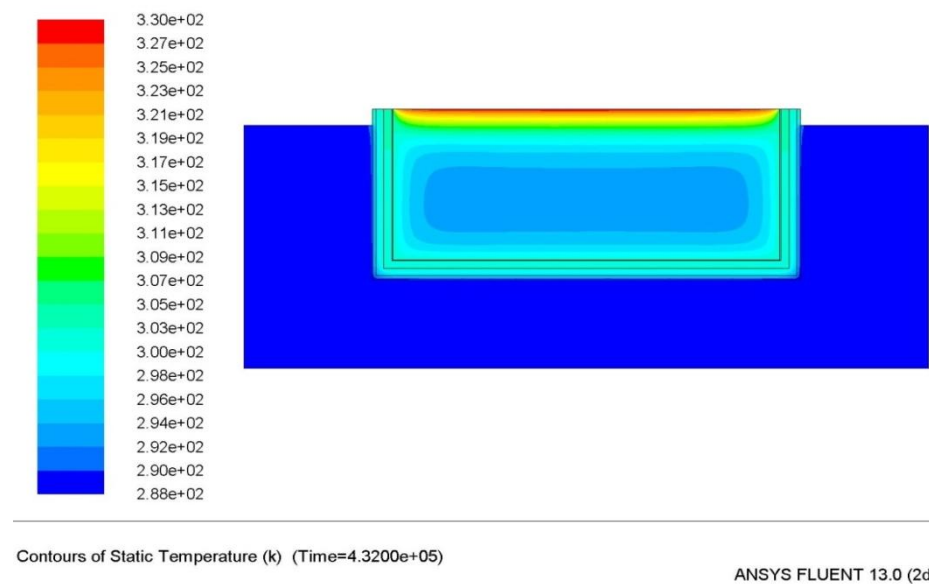


Bild 23 2-dimensionale Temperaturverteilung mit der mittleren Wassertemperatur von 298.68 Kelvin

Der Temperaturunterschied zu dem 1-D Modell beträgt 3 Kelvin. Daraus wird zuerst die Wärmemenge berechnet, um abschließend die Verluste in Form von Wärmestrom zu ermitteln. Die Berechnungen beziehen sich auf einen 1m in z-Richtung tiefen Abschnitt.

$$Q = m * C_p * \Delta T \quad (8.1)$$

$$Q = 8,4 \, m^3 * 998 \frac{kg}{m^3} * 4180 \, J/(kg * K) * 3K = 29 \, kWh$$

$$Q_s = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{29kWh}{120h} = 0,2416 \, kW \quad (8.2)$$

Damit erhalten wir einen Wärmestrom von 241,6 Watt, das im Mittel durch die Konstruktion des Speichers verloren geht. Dieser Wärmeverlust bezieht sich auf die Validierung und dient exemplarisch für Berechnungen mit der Berücksichtigung von Konstruktion. In weiteren Berechnungen wird die Konstruktion durch den Wärmedurchgangskoeffizient (U-Wert) ersetzt.

9 Temperaturverteilung innerhalb eines Tages

Zunächst sollen Prozesse betrachtet werden, die innerhalb kleiner Zeitspannen auftreten. Dazu zählen Strahlungseffekte und Konvektionseffekte. Als Strahlungsquelle wird der Solar Calculator von FLUENT verwendet. Dort sind für bestimmte Orte und Zeiten solare Strahlungswerte hinterlegt. Es wird ein wolkenloser Tag mit einem Sonnenscheinfaktor von 1 unterstellt. Der Sonnenhöhenwinkel wird ebenfalls berücksichtigt. Dafür wurden Längen- und Breitengrad von Cottbus gewählt.

Breitengrad: 51,7667

Längengrad: 14,3333

Beginn der Rechnung

Datum: 16 Mai

Zeit: 6:00 Uhr

Dauer: 12 Stunden

Außentemperaturen

6-18 Uhr 294,75 Kelvin

18-6 Uhr 270,55 Kelvin

Konvektion

Wärmeübergangswiderstand Außen $h = 25 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$

Dichteänderung des Wassers infolge Temperaturunterschiede mittels Polynom 3. Grades

$$\rho = -0,003 \text{ K}^2 + 1,684 \text{ K} + 762,9$$

Die Gravitation wurde ebenfalls berücksichtigt.

Abstrahlung

Die Abstrahlung im langwelligen Wellenlängenbereich wird nur auf der Oberfläche der transparenten Abdeckung berücksichtigt. Dafür werden 250 Kelvin für die Normalatmosphäre in 5200 m Höhe als mittleres Schwarzstrahlungs - Emissionsniveau der planetarischen Ausstrahlung angenommen [12].

Randbedingungen

Für die Berechnung lagen folgende Werte zugrunde:

Absorptionskoeffizient:	$0,9\text{m}^{-1}$
Brechungsindex:	1
Emissionsgrad der Innenwände:	0,9
Anfangstemperatur im Speicher:	283 Kelvin
Mittlere Temperatur des Sees:	280 Kelvin
U-Wert der Außenwände:	$0,19\text{ W/m}^2\text{K}$ ohne Rse
U-Wert der Glases:	$1,8\text{ W/m}^2\text{K}$ mit Rse $0,04\text{ (m}^2\text{K)/W}$

Auf die Modellierung der Außenhülle kann verzichtet werden, indem der Wärmedurchgangskoeffizient U berücksichtigt wird. Dazu wird die folgende Annahme getroffen.

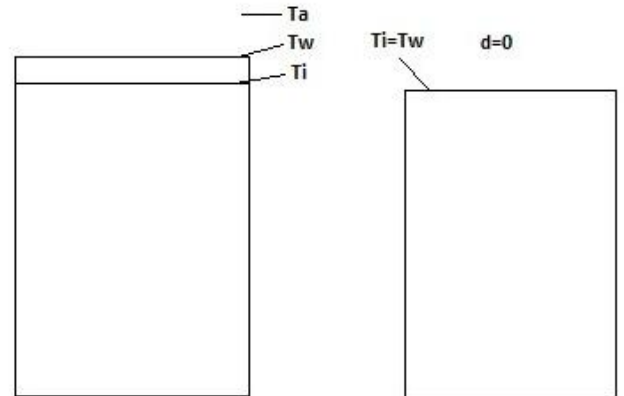
Wärmedurchgangskoeffizient bei unendlich dünnen Wänden

Bei der Randbedingung der dritten Art in der Wärmeübertragung sind die Konvektion und die Temperaturdifferenz zwischen Außenwandtemperatur und der Umgebung maßgebend. Da die Wanddicke im Simulationsmodell $d=0$ ist, entspricht die Innenwandtemperatur der Außenwandtemperatur $T_i=T_w$. Daraus ergibt sich eine zu hohe (falsche) Wärmeabgabe. Um diesen Fehler zu vermeiden, wird der Wärmeübergangskoeffizient h zu h_{d0} angepasst.

$$q = h * (T_w - T_a) = h_{d0} * (T_i - T_a) \quad (9.1)$$

$$U * (T_i - T_a) = h_{d0} * (T_i - T_a) \quad (9.2)$$

Somit erhalten wir einen Wärmeübergangskoeffizienten h_{d0} bei unendlich dünnen Wänden, der dem Wärmedurchgangskoeffizienten einer Wandkonstruktion entspricht $U=h_{d0}$. Diese Annahme wurde überprüft und berücksichtigt einen Wärmeübergangs-Koeffizienten h an der Oberfläche von 25 W/m²K.



Schicht	Dicke in m	λ in W/(m*K)	R in (K*m²)/W	ΔT in Kelvin	T in Kelvin	
Rse	-	-	0,040	0,072	282,000	Ta
Glas	0,030	0,058	0,515	0,928	282,072	Tw
Rsi	-	-	-		283,000	Ti
Rges	0,55	(K*m²)/W				
U	1,80	W/(K*m²)				
q=	1,80	W/m²				

9.1 Ergebnisse mit dem P1-Strahlungsmodell

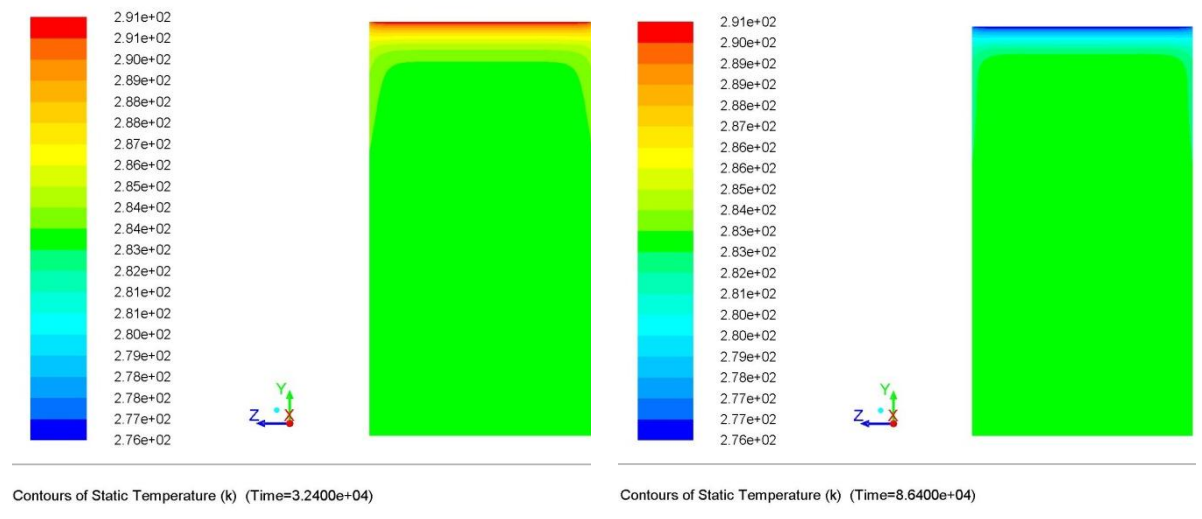
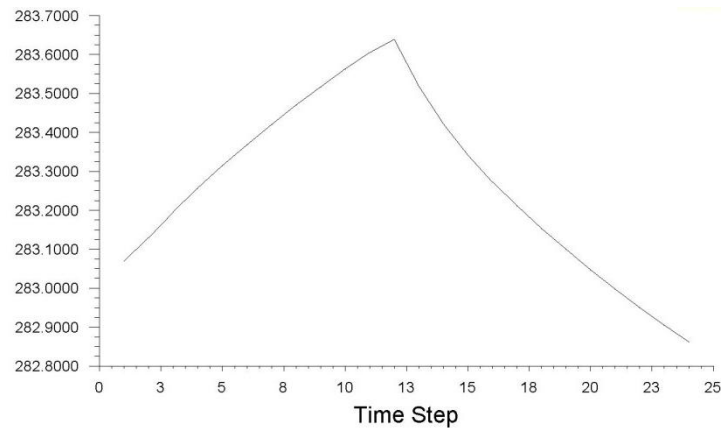


Bild 24 Temperaturschichtung nach 12 Stunden. Links in der Aufwärmphase am Tag. Rechts in der Abkühlphase in der Nacht ohne Konvektion

In den Bildern ist zu erkennen, dass es nur in den oberen Schichten Temperaturschwankungen auftreten. Bei der Berücksichtigung des konvektiven Auftriebes des Wassers ist zu erwarten, dass die Schichtung der Temperatur in der Nacht, sich nahezu vollständig aufhebt. Dadurch werden an der Oberfläche etwas höhere Temperaturen erreicht. Dies führt wiederum zu höheren Wärmeverlusten. Die mittlere Wassertemperatur fällt daher geringer aus als bei der Betrachtung ohne Konvektion.



Temperature on interior-wasser (Time=8.6400e+04)

ANSYS FLUENT 13.0 (3d, dp, pbns, lar)

Bild 25 Verlauf der mittleren Wassertemperatur am Tag und in der Nacht ohne Konvektion. Nach 24 Stunden beträgt die minimale Temperatur 282,94 Kelvin

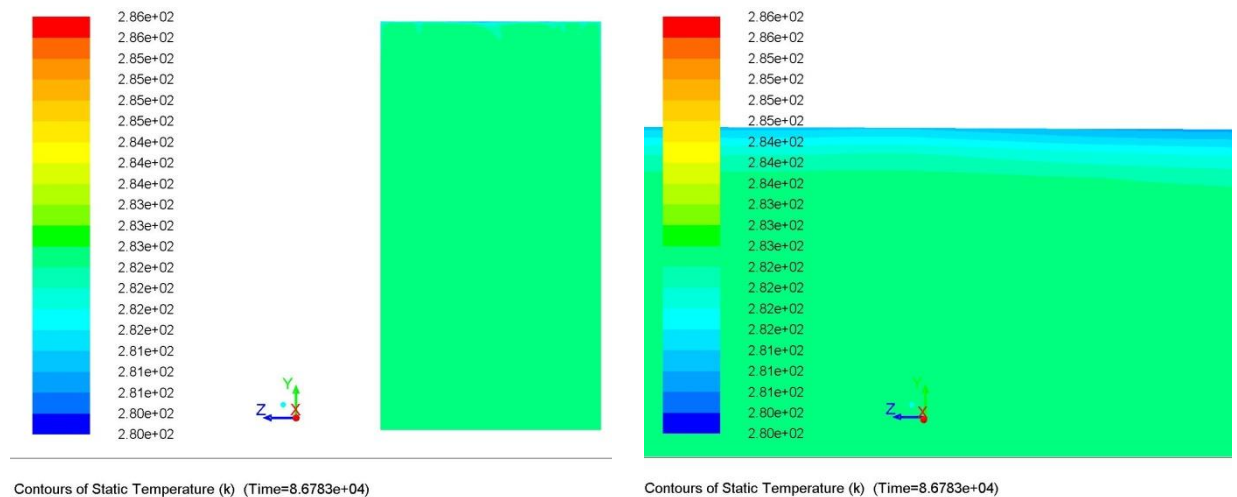


Bild 26 Temperaturschichtung nach 24 Stunden mit Konvektion. Die mittlere Wassertemperatur ist auf 282,64 K gesunken

9.2 Ergebnisse mit dem Strahlungsmodell Discrete Ordinates (DO)

Das DO - Modell ermöglicht einen richtungsabhängigen Strahlungseintrag. Das führt zu lokalen Temperaturerhöhungen, die wiederum Auftriebsströmung hervorrufen. Die richtungsabhängige Strahlung hat keine Auswirkung auf die Energiebilanz, der Aufwand für die Modellierung ist jedoch sehr hoch. Auch die Berechnungszeit erhöht sich mit der Winkelauflösung enorm. In diesem Fall werden daher nicht alle Strahlungseigenschaften berücksichtigt. Die diffuse Strahlung sowie die Reflexion der Glasscheibe werden somit vernachlässigt. Das Interesse bezieht sich auf die Temperaturverteilung mit Konvektion.

Randbedingungen

Für die Berechnung mit DO-Strahlungsmodell liegen folgende Werte zugrunde:

Absorptionskoeffizient:	0.9 m^{-1}
Brechungsindex:	1
Emissionsgrad der Innenwände:	0,9
Anfangstemperatur im Speicher:	283 Kelvin
Mittlere Temperatur des Sees:	283 Kelvin
U-Wert der Außenwände:	$0,19 \text{ W/m}^2\text{K}$
Wärmeübergangswiderstand h:	$1,5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$

Ausrichtung

Nord: X=-1

Ost: Z=-1

Süd: X=1

West: Z=1

Tabelle 5 Sonnenstand und dazugehörige direkte Strahlungswerte

Flow Time	Sun Direction Vector			Direct Normal Solar Irradiation (at Earth's surface) [W/m ²]
	X	Y	Z	
6	-0.020396	-0.052322	-0.998422	0
7	0.183674	0.109458	-0.976874	292.094
8	0.376462	0.260416	-0.889078	659.766
9	0.544844	0.393102	-0.740686	805.374
10	0.677298	0.49772	-0.541795	874.432
11	0.764795	0.566988	-0.305963	908.087
12	0.801372	0.596134	-0.049271	920.215
13	0.784491	0.583217	0.210788	914.97
14	0.715306	0.529116	0.45648	890.619
15	0.598538	0.437542	0.671051	838.034
16	0.4421	0.314876	0.839882	730.749
17	0.256663	0.169846	0.95146	481.467

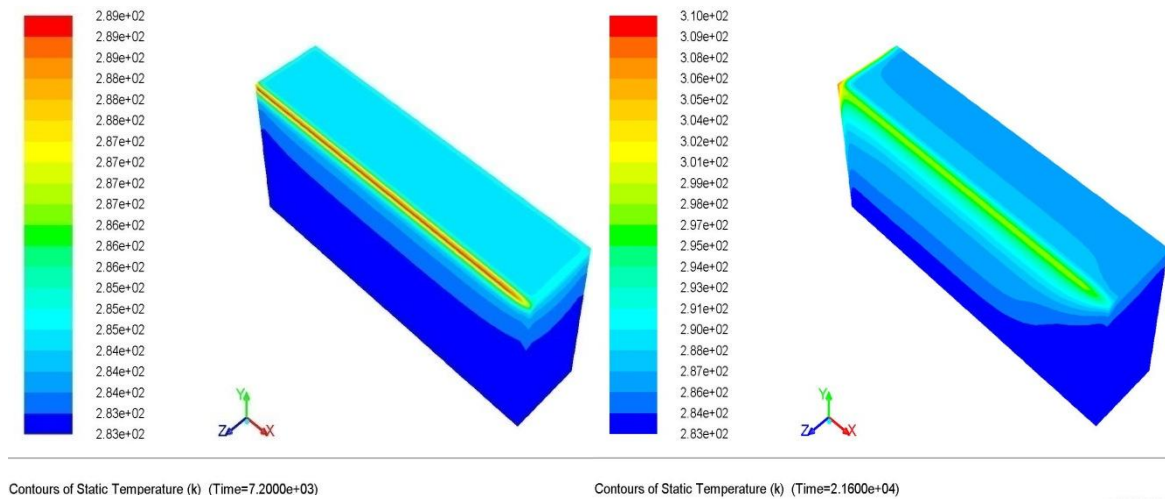


Bild 27 Temperaturverteilung ohne Konvektion nach 2 Stunden (links) und nach 6 Stunden (rechts)

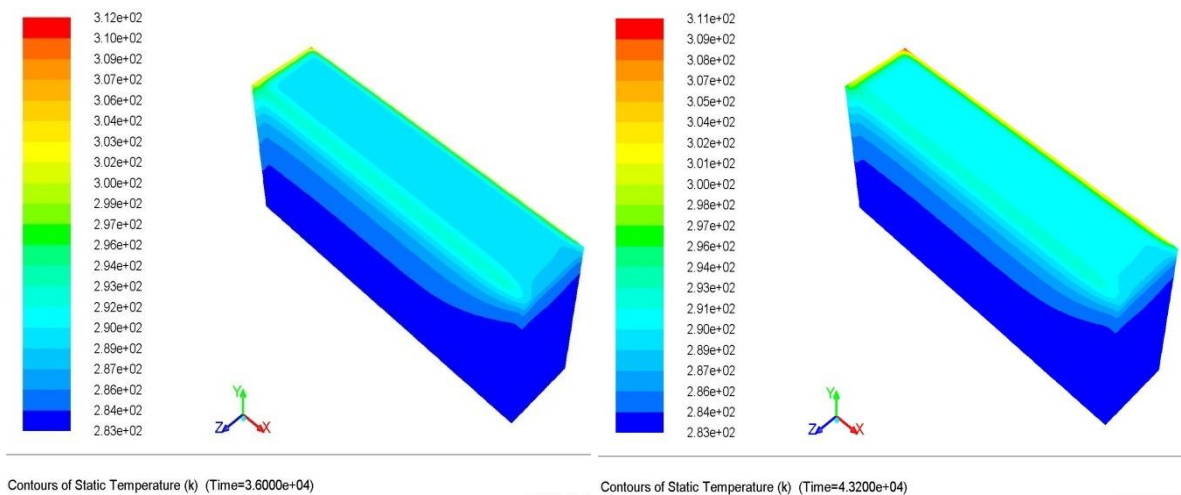


Bild 28 Temperaturverteilung ohne Konvektion nach 10 Stunden (links) und nach 12 Stunden (rechts)

9 Temperaturverteilung innerhalb eines Tages

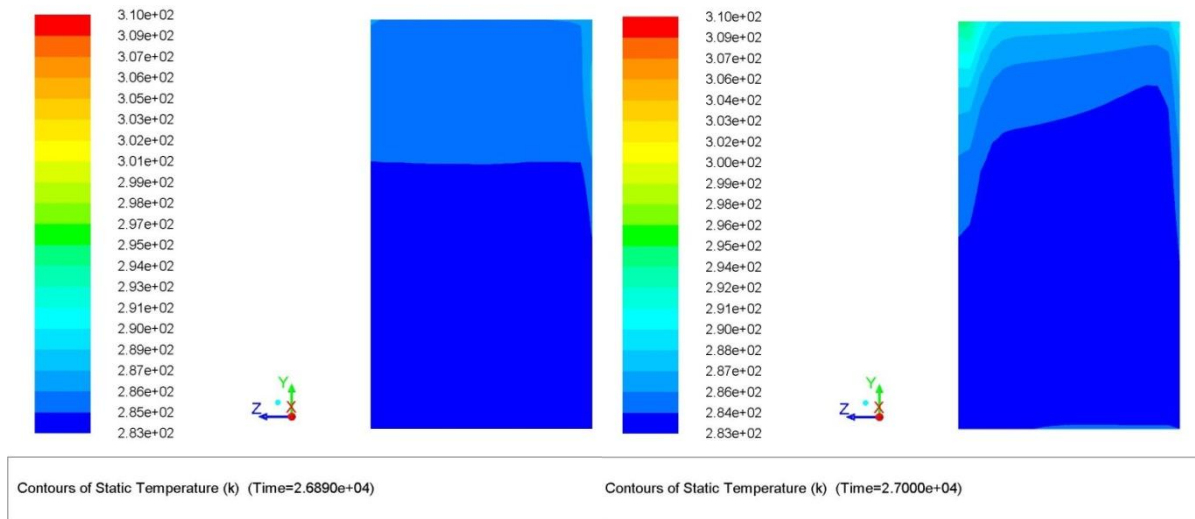


Bild 29 Temperaturverteilung nach ca. 7,5 Stunden. Links mit Konvektion, rechts ohne Konvektion

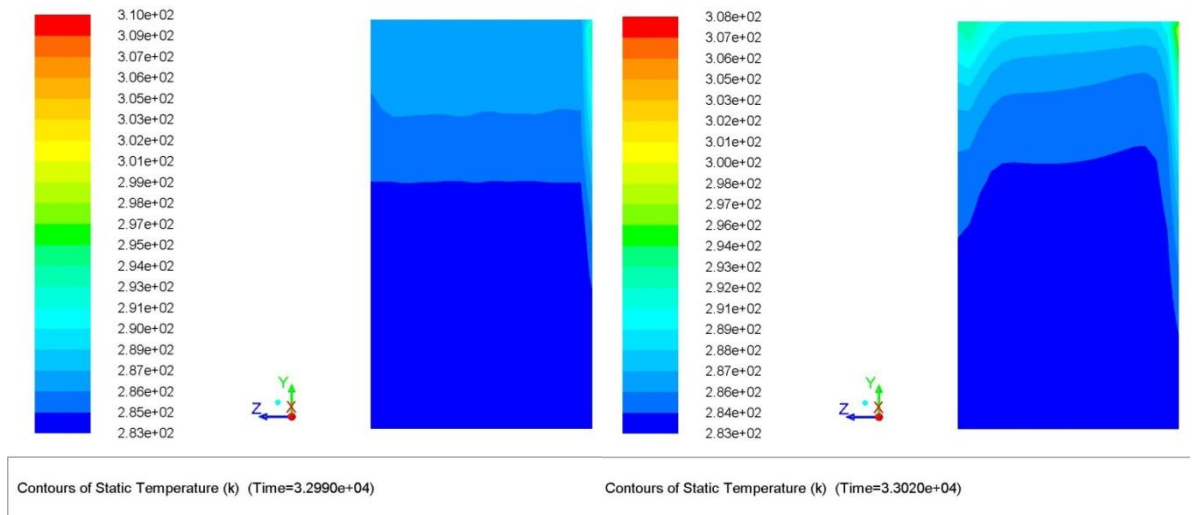


Bild 30 Temperaturverteilung nach ca. 9 Stunden. Links mit Konvektion, rechts ohne

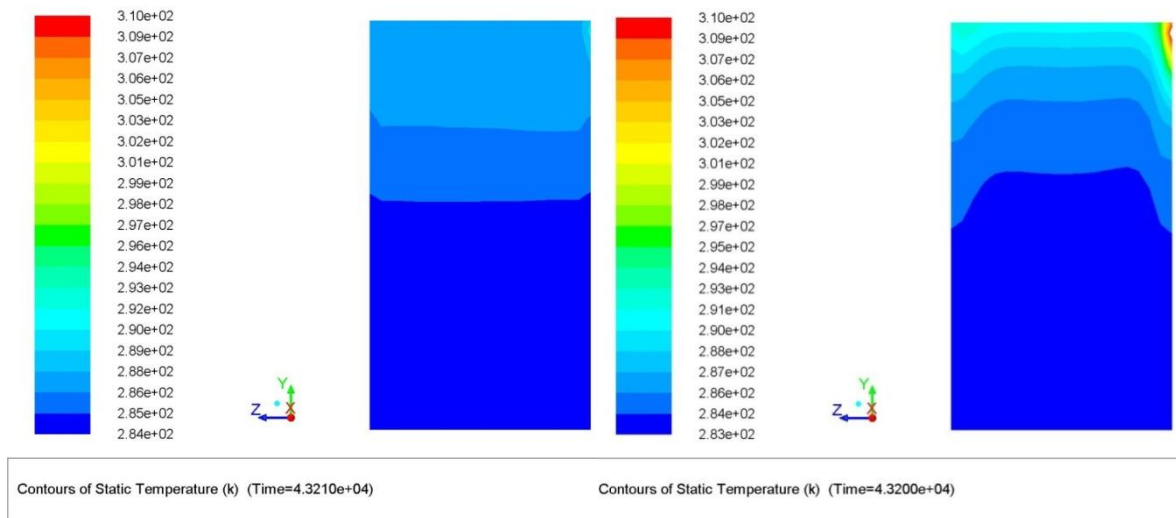


Bild 31 Temperaturverteilung nach ca. 12 Stunden. Links mit Konvektion, rechts ohne

Fazit

Wegen dem Auftrieb des Wassers gleicht sich die horizontale Temperaturverteilung wieder aus. Es entsteht die charakteristische vertikale Temperaturschichtung. Ohne Konvektion dagegen besteht beim DO-Modell eine unsymmetrische Temperaturverteilung.

10 Berechnungen der Temperaturverteilung innerhalb eines Jahres

10.1 Simulation mit Jahresmittelwerten

Im ersten Schritt werden die Temperaturschwankungen sowie der unterschiedliche solarer Eintrag durch Jahresmittelwerte ersetzt. Dadurch erreichen wir die mittlere Erwärmung des Wassers im Speicher über das Jahr betrachtet. Diese wird erreicht, nachdem sich ein Gleichgewichtszustand zwischen Energiegewinn und Energieverlust einstellt. In diesem Zusammenhang kann z.B. die Effektivität oder der unterschiedliche Aufbau des Speichers beurteilt werden.

Da die mittlere Jahrestemperatur über der Anfangstemperatur des Speichers liegt und die Globalstrahlung zu einer stetigen Erwärmung führt, bleibt der obere Bereich des Speichers wärmer als der Untere. Somit findet keine Konvektion statt. Die Wärmeabgabe des Speichers nach außen erfolgt daher mittels der Wärmeleitung (Konduktion). Die Abstrahlung der Glasfläche sowie die Zustrahlung des Himmels werden nicht berücksichtigt.

Für die Berechnung lagen folgende Werte zugrunde:

Absorptionskoeffizient des Wassers:	0.9m^{-1}
Brechungsindex:	1
Emissionsgrad der Innenwände:	0,9
Anfangstemperatur im Speicher:	283 K
Mittlere Temperatur des Sees:	280 K
Mittlere Jahrestemperatur:	282.83 K
Mittelwert der Globalstrahlung und der g-Wert von 0,6:	$114,70 \cdot 0,6 = 68,82 \text{ W/m}^2$
U-Wert der Außenwände:	$0,19 \text{ W/m}^2\text{K}$
U-Wert des Glases:	$1,8 \text{ W/m}^2\text{K}$

Ergebnisse

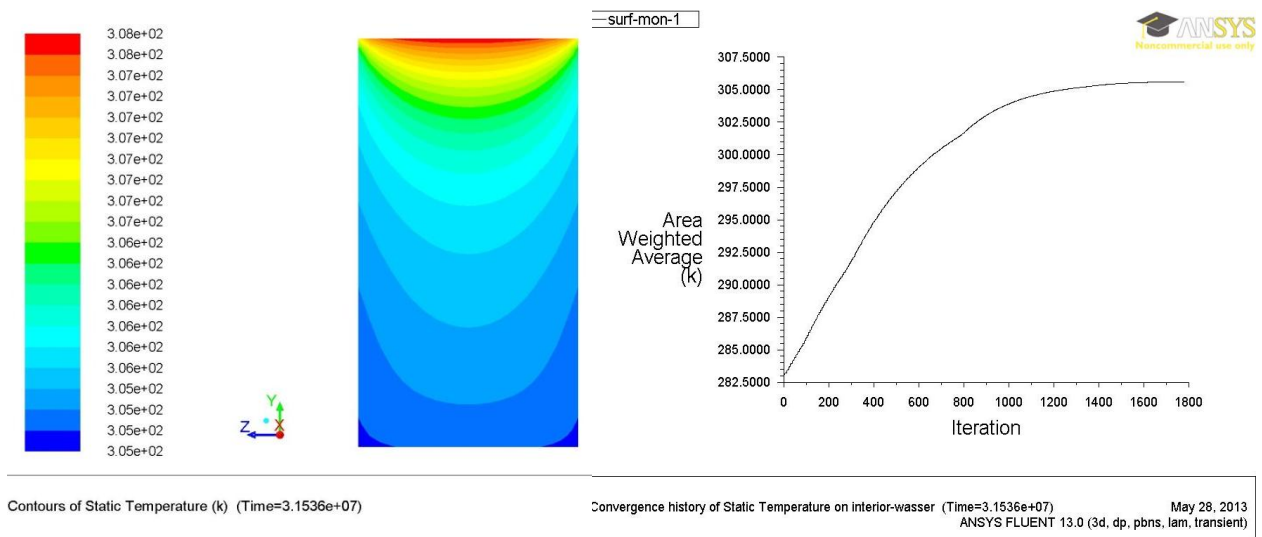


Bild 32 Temperaturverteilung mit Jahresmittelwerten und der dazugehörige Verlauf der mittleren Wassertemperatur

Die mittlere Wassertemperatur steigt von 283 auf 305 Kelvin an. Es entspricht einer Temperaturdifferenz von 22 Kelvin.

10.1.1 Ermittlung der Effektivität des Speichers

Die Effektivität wird aus der Differenz zwischen dem theoretischen Wärmeeintrag ohne Verluste und der errechneten Wärmemenge mit Verlusten an die Umgebung berechnet. Die Wärmemenge entspricht der Temperaturdifferenz von 22 Kelvin. Der Jahresmittelwert für die solare Strahlung beträgt 68,82 W/m².

Wärmeeintrag ohne Verluste:

$$Q = q * A * t \quad (10.1)$$

$$Q = 68,82 \frac{W}{m^2} * 4,51 m^2 * 8760 h/a = \mathbf{2718 kWh}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{m * Cp} \quad (10.2)$$

$$\Delta T = \frac{2718 kWh}{8,4 m^3 * \frac{998 kg}{m^3} * \frac{4180 J}{kg * K}} = 279 K$$

Wärmeeintrag mit Verlusten

$$Q = m * C_p * \Delta T \quad (10.3)$$

$$Q = 8,4 \, m^3 * 4180 \frac{J}{kg * K} * 22 \, K = \mathbf{214,14 \, kWh}$$

Effektivität: 8 %

Nur 8 % des theoretischen Wärmeeintrages werden im Wasserbehälter über das Jahr gespeichert.

10.2 Simulation mit Monatsmittelwerten

Bei der Simulation mit den Monatsmittelwerten kommt es nach der Sommerperiode zur Abkühlung des Speichers. Die größte Abkühlung findet an der Glasscheibe statt. Dies führt dazu, dass die oberen Schichten kälter sind als die Unteren. Der Auftrieb des wärmeren Wassers von unten nach oben erzeugt eine freie Konvektion.

Tabelle 6 Mittlere monatliche gemessene Globalstrahlungswerte sowie mittlere Monatstemperatur [13]

Monat	Qs in kWh/m ²	q in W/m ²	q mit g=0,6	T in °C Jahr 2011	Kelvin
Januar	18,57	25,44	15,26	1,9	275,05
Februar	34,13	46,75	28,05	1,1	274,25
März	67,77	92,84	55,70	4	277,15
April	109,56	150,08	90,05	11,4	284,55
Mai	154,91	212,21	127,32	13,7	286,85
Juni	148,62	203,59	122,15	16,6	289,75
Juli	160,21	219,47	131,68	16,6	289,75
August	133,64	183,07	109,84	16,8	289,95
September	86,88	119,01	71,41	14,7	287,85
Oktober	54,28	74,36	44,61	9,9	283,05
November	22,2	30,41	18,25	5,1	278,25
Dezember	14,01	19,19	11,52	4,4	277,55
Summe	1004,78	1376,41			
Mittelwert	83,73	114,70	68,82	9,68	282,83

10 Berechnungen der Temperaturverteilung innerhalb eines Jahres

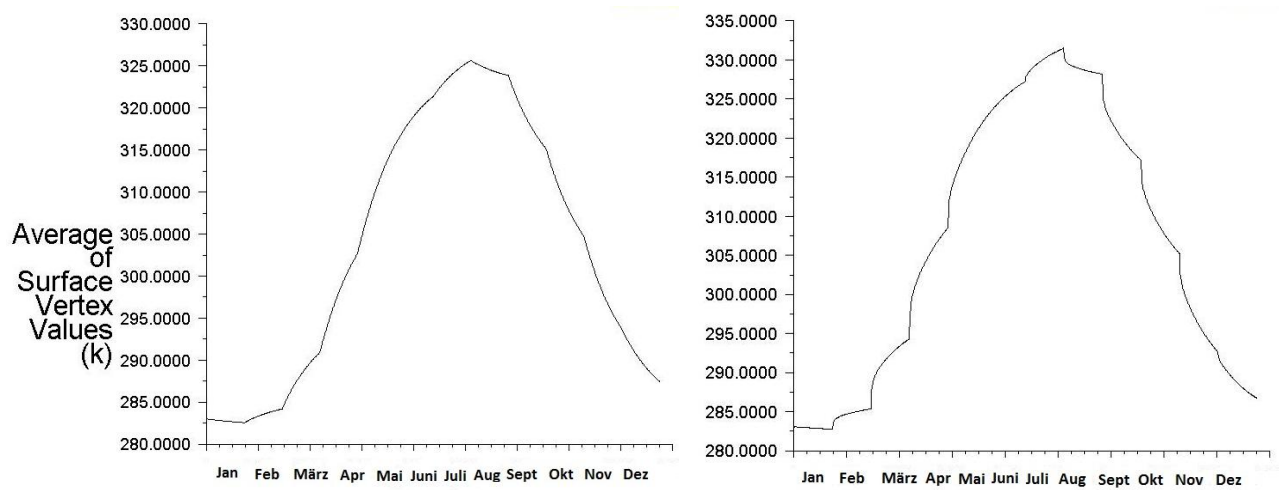


Bild 33 Links ist der Verlauf der mittleren Wassertemperatur dargestellt. Rechts ist die Temperatur an der Oberfläche zu sehen

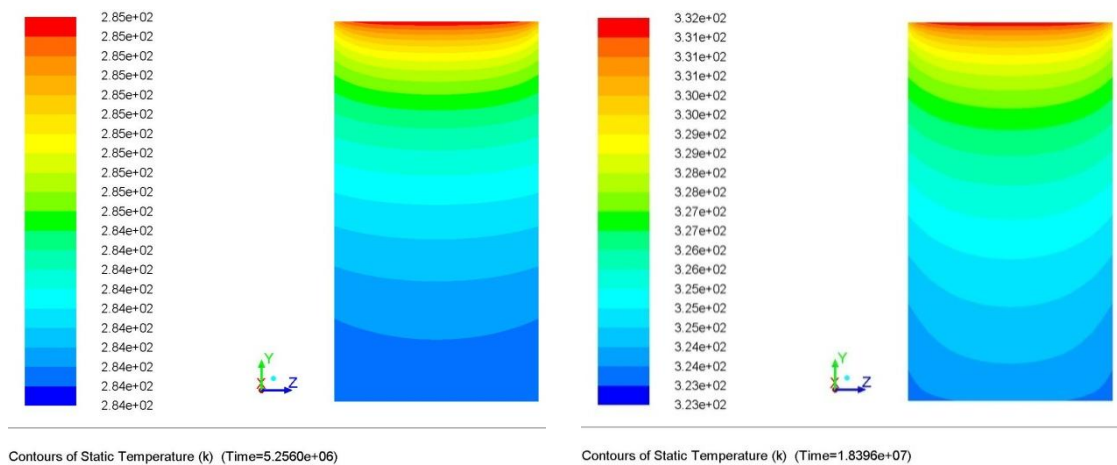


Bild 34 zeigt die Temperaturschichtung im Februar (links) und im Juli (rechts)

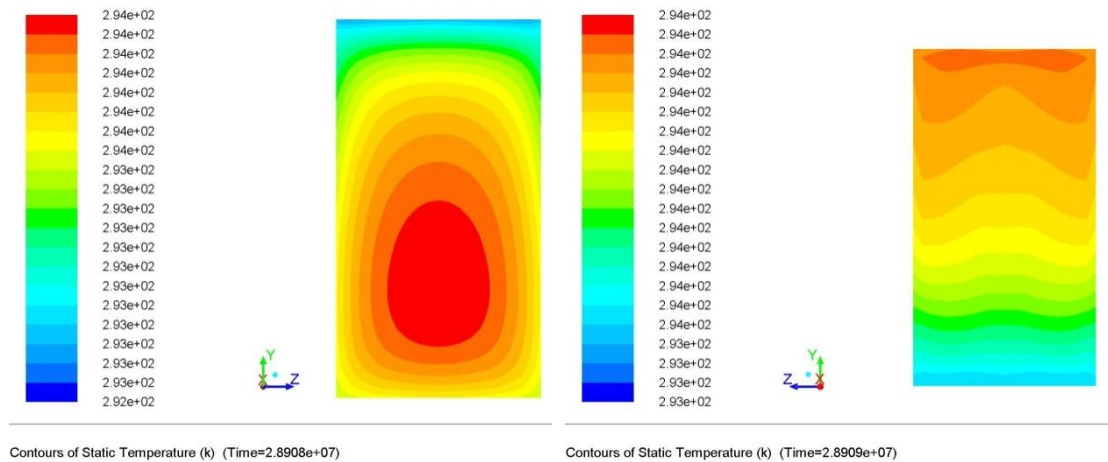


Bild 35 Temperaturschichtung ende November ohne Konvektion (links) und mit Konvektion nach ca 17 Minuten (rechts)

Wie im Bild 33 zu sehen, kühlt sich der Speicher in Herbstmonaten allmählich ab. Ende November erreicht die Differenz zwischen der oberen minimal und unteren maximal Temperatur 2 Kelvin. Erst jetzt macht es Sinn, die Konvektion zu berücksichtigen. Für die Berechnung mit Konvektion werden somit die Ergebnisse für den Monat November als Ausgangswerte genommen. Nach ca 17 Minuten durchmischt sich das Wasser und die Temperaturschichtung nimmt wieder von oben nach unten ab.

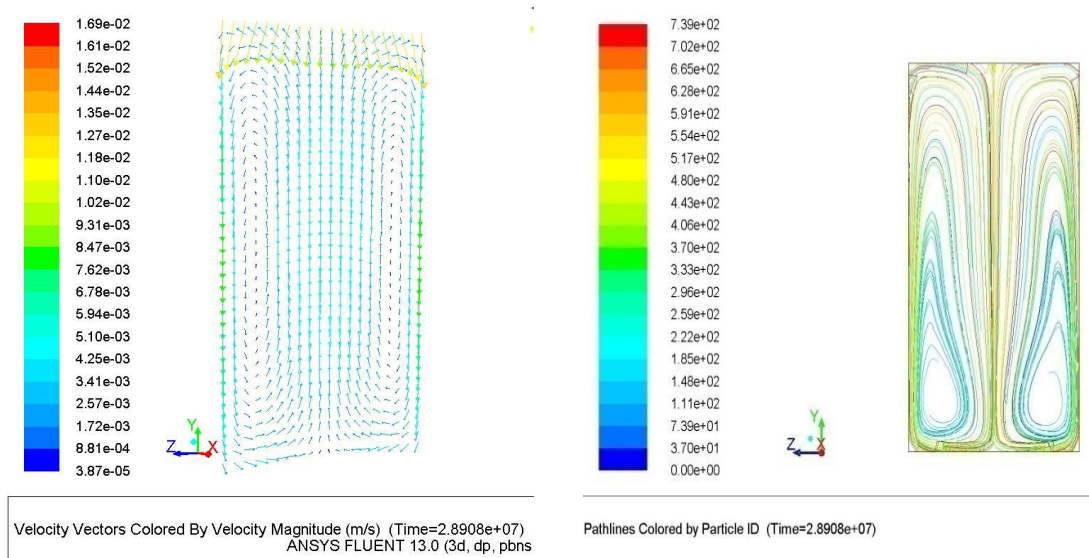


Bild 36 Auftriebsgeschwindigkeit und deren Richtung (links) sowie Darstellung der Strömungslinien (rechts).

10.2.1 Kontrolle der Ergebnisse mittels Energiebilanz

Die Ergebnisse aus FLUENT sollen anhand der Energiebilanz quantifiziert werden. Damit kann festgestellt werden, wie groß der Unterschied zwischen der Energiebilanzierung und der detaillierten Berechnung ist. Somit können völlig Abweichende Ergebnisse ausgeschlossen werden.

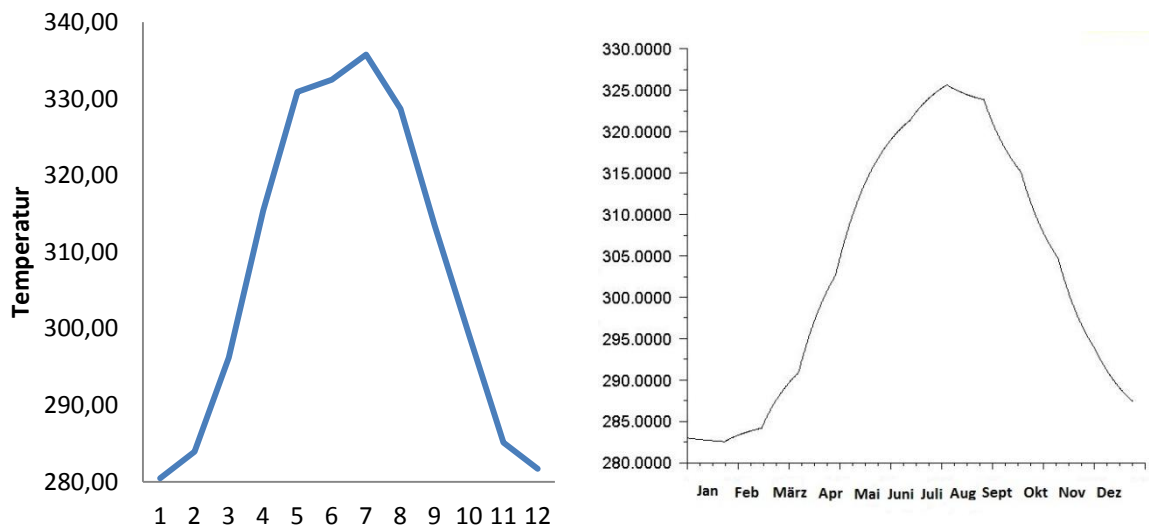


Bild 37 Temperaturverlauf aus der Bilanzrechnung (links) und aus der Berechnung mit FLUENT (rechts)

Es ist zu bemerken, dass die mittlere Wassertemperatur bei der Bilanzrechnung in Tabelle 7 um 10 Kelvin höher ist als in den Berechnungen mit FLUENT. Das liegt daran, dass durch die Temperaturschichtung im oberen Bereich des Speichers höhere Temperaturen erreicht werden und dadurch auch mehr Verluste auftreten.

Tabelle 7 Energiebilanz des Warmwasserspeichers

Monat	Außentemperatur	q mit g=0,6	Gewinne	Verluste $Q=h*\Delta T*A*t$		Differenz	$\Delta T=Q/(m*Cp)$	Wassertemperatur
			$Q=q*A*t$ in Wh	Glas	Wand			
Januar	275,05	15,26	50240,50	-47112,81	-27599,70	-24472,02	-2,51	280,49
Februar	274,25	28,05	92349,02	-36954,69	-21648,86	33745,47	3,47	283,95
März	277,15	55,7	183381,11	-40313,77	-23616,68	119450,66	12,27	296,22
April	284,55	90,05	296471,62	-69184,18	-40529,59	186757,84	19,19	315,41
Mai	286,85	127,32	419175,64	-169255,81	-99153,71	150766,11	15,49	330,90
Juni	289,75	122,15	402154,45	-243859,30	-142858,05	15437,09	1,59	332,49
Juli	289,75	131,68	433530,06	-253257,70	-148363,84	31908,53	3,28	335,76
August	289,95	109,84	361626,23	-271498,99	-159049,98	-68922,74	-7,08	328,68
September	287,85	71,41	235103,14	-241982,40	-141758,52	-148637,78	-15,27	313,41
Oktober	283,05	44,61	146869,50	-179934,35	-105409,43	-138474,27	-14,23	299,19
November	278,25	18,25	60084,48	-124074,03	-72685,25	-136674,80	-14,04	285,15
Dezember	277,55	11,52	37927,30	-45012,09	-26369,06	-33453,85	-3,44	281,71
t	730h/Mona							

11 Zusammenfassung

Mit der Software ANSYS FLUENT können unter bestimmten Annahmen wichtige und mehrere Randbedingungen berücksichtigt werden. Damit werden bessere Ergebnisse erreicht. Gleichzeitig eröffnen sich zahlreiche Möglichkeiten zur Bewertung von unterschiedlichen Varianten. Die Plausibilität der Ergebnisse muss jedoch stets überprüft werden. In diesem Fall geschah dies durch Validierung und durch die Energiebilanz.

Die Ergebnisse zeigen, dass der Warmwasserspeicher mit transparenter Abdeckung zur Energiegewinnung in dieser Form nicht sehr effektiv ist, zumal die Wärme sich im oberen Bereich konzentriert. Dort treten auch die höchsten Verluste auf. Es bedarf daher einiger Verbesserungen.

Eine Form der Verbesserung könnten die Leitungsstäbe im Warmwasserspeicher bieten. Sie können die hohen Temperaturen im oberen Bereich aufnehmen und über die Tiefe des Speichers verteilen. Bei der Abkühlung werden dadurch, infolge gleichmäßiger Temperaturverteilung die Wärmeverluste deutlich geringer. Damit könnte man die Verluste durch die Abdeckung reduzieren und zusätzlich mehr Energie im Speicher aufnehmen.

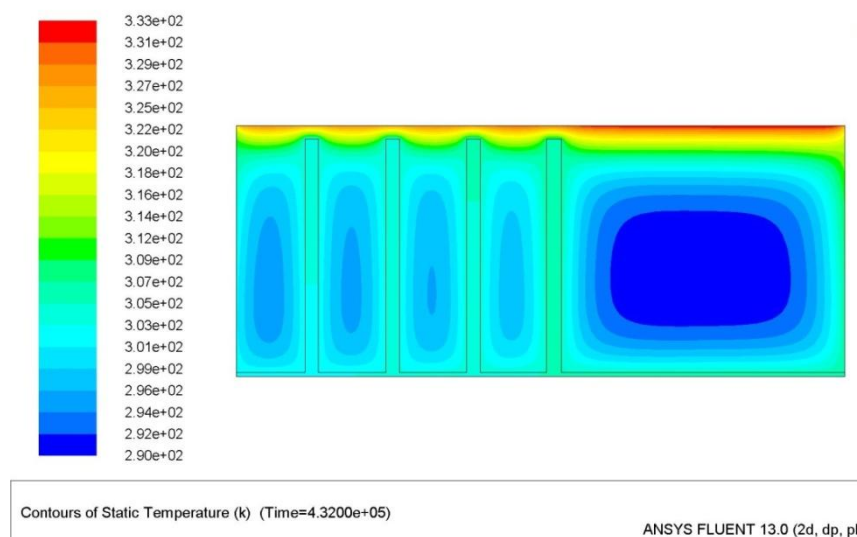


Bild 38 Temperaturverteilung mit Leitungsstäben nach 12 Stunden Sonnenscheindauer

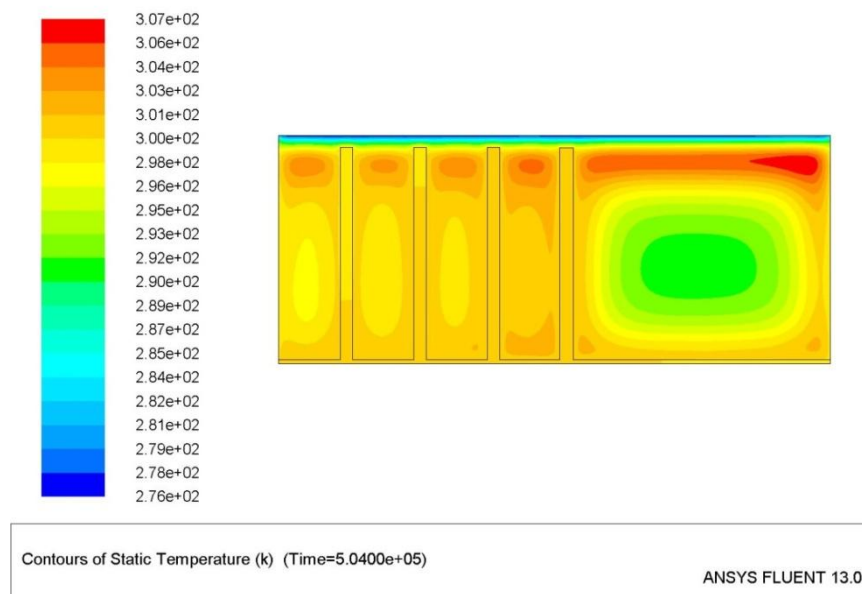


Bild 39 Temperaturverteilung mit Leitungsstäben nach 12 Stunden Abkühlung in der Nacht

Diese Variante muss im Detail untersucht werden, da das Problem in der wellenlängenabhängigen Strahlung und damit verbundenen Absorptionskoeffizienten liegt. In diesem Zusammenhang muss berücksichtigt werden, dass die Stäbe die direkte Strahlung, die das Wasser durchdringt, absorbieren und im langwelligen Bereich abstrahlen. Dabei muss der spektrale Absorptionskoeffizient des Wassers sich mit der gegebenen Wellenlänge ändern. Nur damit können realitätsnahe Ergebnisse erzielt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Asya Sacharova, Magisterarbeit: Schwimmender Warmwasserspeicher, Moskauer Energetisches Institut 2012
- [2] Prof. Dr. Wolfgang Schlüter: Simulation des Wärmespeichers, Hochschule Ansbach 2013
- [3] Dr.-Ing. Peter Strangfeld: Bauphysik, HS-Lausitz
- [4] Hans Dieter Baehr, Karl Stephan: Wärme- und Stoffübertragung, 6. Auflage, 2008 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [5] Wasilij Glasov, Moskauer Energetisches Institut: persönliche Mitteilung 2012 (*В.С. Глазов, к.т.н., доц. «НИУ «МЭИ»*)
- [6] Stefan Lecheler: Numerische Strömungsberechnung, 1. Auflage Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2009
- [7] Claus-Dieter Munz, Thomas Westermann: Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen, 3. Auflage 2012, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [8] Dr.-Ing. Günter Müller, Dipl.-Ing. Clemens Groth: FEM für Praktiker-Band 1: Grundlagen, 8. Auflage Jahr 2007, Expert Verlag, Renningen
- [9] <http://www.cadfem.de>, Abruf am 19.06.13
- [10] Dr.-Ing. Günter Müller, Dipl.-Ing. Clemens Groth: FEM für Praktiker-Band 3: Temperaturfelder, 5. Auflage Jahr 2009, Expert Verlag, Renningen

- [11] Eckert Laurien, Herbert Ortel: Numerische Strömungsmechanik,
3. Auflage 2009 Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden
- [12] Hermann Rietschel: Raumklimatechnik, 16. Auflage, Band 1
Grundlagen, 2008 Springer-Verlag
- [13] Recknagel, Hermann: Taschenbuch für Heizung und
Klimatechnik, 72. Auflage, 2005 Oldenburg Industrieverlag

Begriffserklärung

Dissipation	Vorgang in einem dynamischen System, bei dem die Energie in andere Formen umwandelbar ist
Isotrop	Werkstoffe, die richtungsunabhängige Eigenschaften haben
Konvergenz	Erfüllung der Differenzialgleichung
Nabla-Operator	wird benutzt, um die drei Differenzialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation zu bezeichnen
Subroutinen	Unterprogramme, kehren nach Abschluss jeweils in das aufgerufene Programm zurück

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich versichere hiermit ehrenwörtlich durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften oder dem Internet entnommen worden sind, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat noch nicht in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung dieser oder einer anderen Prüfungsinstanz vorgelegen.

Ort, Datum

Unterschrift

Anhang A

Berechnung des Absorptionskoeffizienten (Variante 2) mit Maple

```

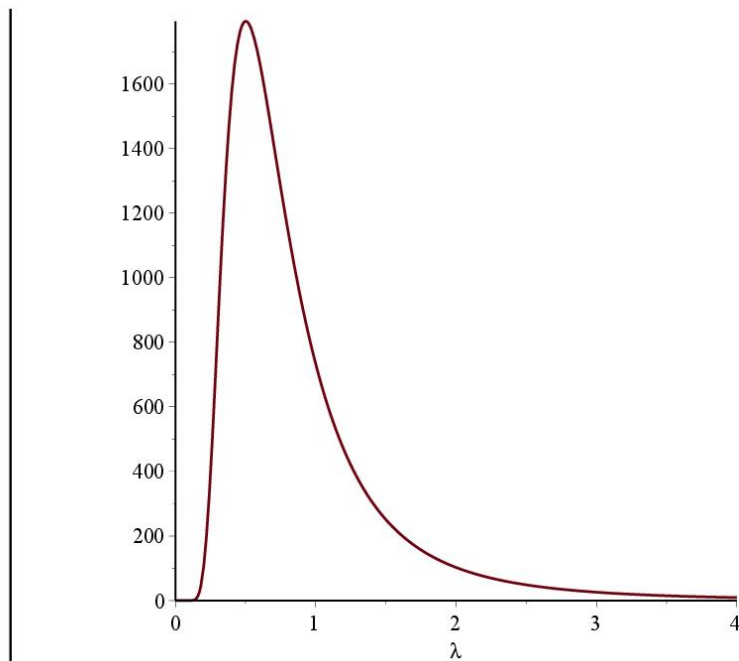
|> restart
|
|> T := 5777
|                                     T := 5777
|                                     (1)
|
|> C1 := 3.7418·10-16
|                                     C1 := 3.741800000 10-16
|                                     (2)
|
|> C2 := 1.4388·10-2
|                                     C2 := 0.01438800000
|                                     (3)
|
|> σ := 5.67·10-8
|                                     σ := 5.670000000 10-8
|                                     (4)
|
|> R := 1.495·1011
|                                     R := 1.495000000 1011
|                                     (5)
|
|> Rs := 6.96·108
|                                     Rs := 6.960000000 108
|                                     (6)
|
|> F := 4·π·R2
|                                     F := 8.940100000 1022 π
|                                     (7)
|
|> E0 := 
$$\frac{\left( \frac{C1}{(\lambda \cdot 10^{-6})^5 \cdot \left( e^{\frac{C2}{\lambda \cdot 10^{-6} \cdot T}} - 1 \right)} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (Rs)^2 \right)}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot 10^{-6}$$

|                                     E0 := 
$$\frac{8109.921764}{\lambda^5 \left( e^{\frac{2.490566038}{\lambda}} - 1 \right)}$$

|                                     (8)
|
|> Ek := 
$$\int_{0.01}^{100} E0(\lambda) \, d\lambda$$

|                                     Ek := 1368.775769
|                                     (9)
|
|> plot(E0, λ = 0..4)

```



```
>
```

$$Ev := \int_{0.4}^{0.8} E0(\lambda) d\lambda$$

$$Ev := 629.9812333$$

(10)

```
>
```

$$K := \frac{600}{Ev}$$

$$K := 0.9524093232$$

(11)

```
>
```

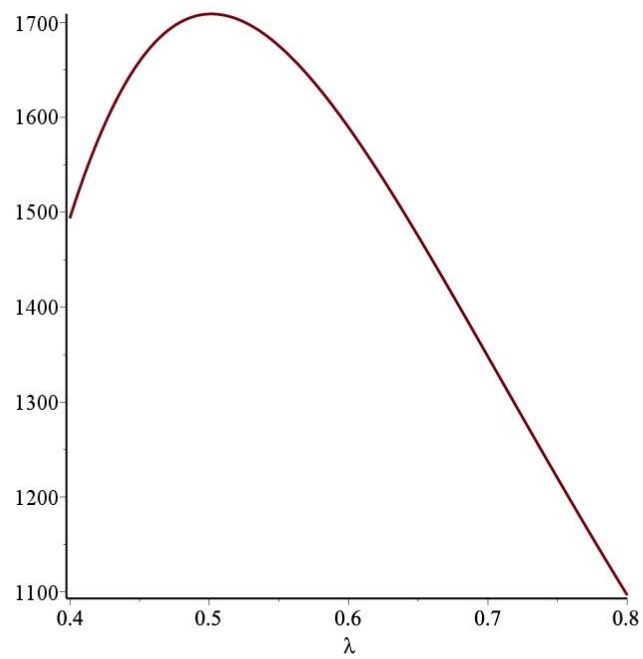
$$EI := \frac{\left(\frac{CI}{(\lambda \cdot 10^{-6})^5} \cdot \left(\frac{C2}{e^{\lambda \cdot 10^{-6} \cdot T} - 1} \right) \cdot 4 \cdot \pi \cdot (Rs)^2 \right)}{F} \cdot 10^{-6} \cdot K$$

$$EI := \frac{7723.965096}{\lambda^5 \left(e^{\frac{2.490566038}{\lambda}} - 1 \right)}$$

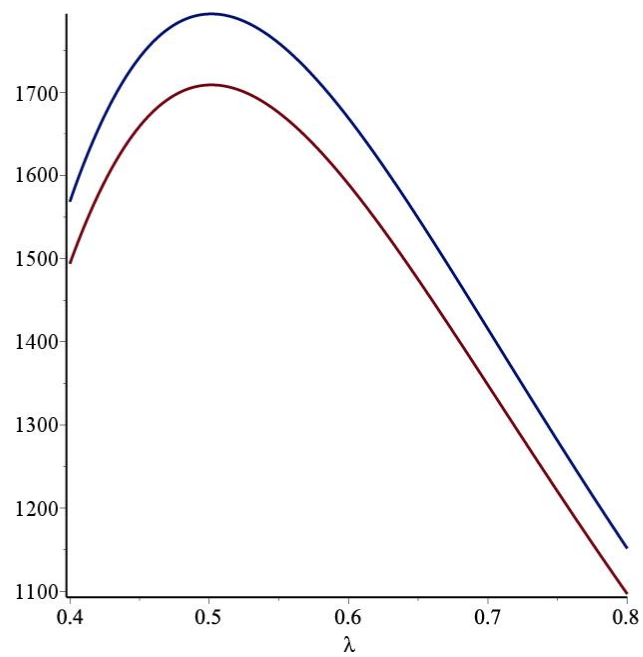
(12)

```
>
```

```
> plot(EI, lambda = 0.4..0.8)
```



```
> plot( [E1(λ), E0(λ) ], λ = 0.4 .. 0.8)
```

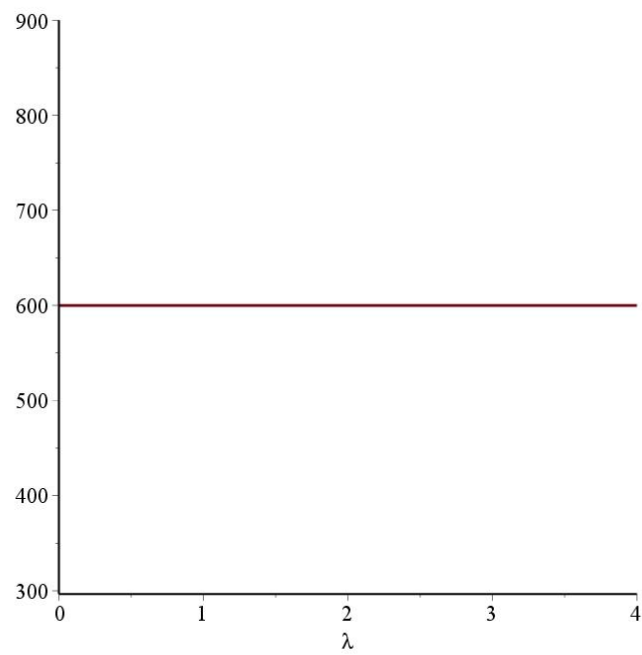


$$> q\lambda := \int_{0.4}^{0.8} \left(\frac{\frac{CI}{(\lambda \cdot 10^{-6})^5 \cdot \left(e^{\frac{C2}{\lambda \cdot 10^{-6} \cdot T}} - 1 \right)} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (Rs)^2}{F} \right) \cdot 10^{-6} \cdot K d\lambda$$

$$q\lambda := 599.9999998$$

(13)

```
>
>
> plot(qλ, λ=0..4)
```



$$> q[1] := \int_{0.40}^{0.45} E I d\lambda$$

$$q_1 := 79.35952697$$

(14)

$$> q[2] := \int_{0.45}^{0.5} E I d\lambda$$

$$q_2 := 84.61349980$$

(15)

$$> q[3] := \int_{0.50}^{0.55} E I d\lambda$$

$$q_3 := 84.88564166$$

(16)

$$> q[4] := \int_{0.55}^{0.6} E I d\lambda$$

$$q_4 := 81.78533370$$

(17)

$$> q[5] := \int_{0.6}^{0.65} E I d\lambda$$

$$\begin{aligned}
 & q_5 := 76.68568783 \quad (18) \\
 & > q[6] := \int_{0.65}^{0.70} E I d\lambda \\
 & q_6 := 70.59525852 \quad (19) \\
 & > q[7] := \int_{0.70}^{0.75} E I d\lambda \\
 & q_7 := 64.18905139 \quad (20) \\
 & > q[8] := \int_{0.75}^{0.80} E I d\lambda \\
 & q_8 := 57.88599998 \quad (21) \\
 & > k[1] := 0.816 \\
 & k_1 := 0.816 \quad (22) \\
 & > k[2] := 0.356 \\
 & k_2 := 0.356 \quad (23) \\
 & > k[3] := 0.182 \\
 & k_3 := 0.182 \quad (24) \\
 & > k[4] := 0.1 \\
 & k_4 := 0.1 \quad (25) \\
 & > k[5] := 0.098 \\
 & k_5 := 0.098 \quad (26) \\
 & > k[6] := 0.098 \\
 & k_6 := 0.098 \quad (27) \\
 & > k[7] := 0.06 \\
 & k_7 := 0.06 \quad (28) \\
 & > k[8] := 0.098 \\
 & k_8 := 0.098 \quad (29) \\
 & > \\
 & \text{Absorption} \\
 & > \\
 & > \sum_{i=1}^8 (1 - e^{-k[i] \cdot 1.86}) \cdot q[i] \\
 & 182.1628222 \quad (30) \\
 & > \\
 & \text{Umstellen nach k} \\
 & > \\
 & > \sum_{i=1}^8 (1 - e^{-k \cdot 1.86}) \cdot q[i] \\
 & 599.9999999 - 599.9999999 e^{-1.860000000 k} \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } kc := \text{solve} \left(qa = \sum_{i=1}^n (1 - e^{-k \cdot 1.86}) \cdot q[i], k \right) \\
 & \quad \quad \quad kc := -0.5376344086 \ln \left(- \frac{1 \cdot \left(qa - 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n q_i \right) \right)}{\sum_{i=1}^n q_i} \right) \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } n := 8 \quad \quad \quad n := 8 \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } qa := \sum_{i=1}^n (1 - e^{-k[i] \cdot 1.86}) \cdot q[i] \\
 & \quad \quad \quad qa := 182.1628222 \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } \text{unapply}(kc) \\
 & \quad \quad \quad () \rightarrow 0.1945364653 \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{> } \sum_{i=1}^8 (1 - e^{-kc \cdot 1.86}) \cdot q[i] \\
 & \quad \quad \quad 182.1628222 \quad (36)
 \end{aligned}$$

Anhang B

Lösung der Wärmeleitung mit Maple

```
> restart
```

$$\text{diff}(T(x, \tau), \tau) = a \cdot \text{diff}(T(x, \tau), (x, x)) + \frac{k \cdot q}{Cp} \cdot e^{-kx}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T(x, \tau) = a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, \tau) \right) + \frac{k q e^{-kx}}{Cp} \quad (1)$$

```
>
```

Randbedingung im Punkt =0

```
> eval(-lambda*diff(T(x, tau), x), x=0) = 0
```

$$-\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} T(x, \tau) \Big|_{x=0} \right) = 0 \quad (2)$$

```
>
```

Randbedingung im Punkt =L

```
> eval(-lambda*diff(T(x, tau), x), x=L) = 0
```

$$-\lambda \left(\frac{\partial}{\partial L} T(L, \tau) \right) = 0 \quad (3)$$

```
>
```

Differenzialgleichung nach der Kosinus Transformation von W. Glasov

$$\theta := \frac{\lambda(T - T0)}{q \cdot L} = (1 - e^{-b}) \cdot \left(Fo + \frac{\left(3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right)}{6} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\left(1 - \frac{2 \cdot x}{L} \right)}{2} - \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{b \cdot x}{L}}$$

$$+ \sum_{n=1}^N \frac{2 b^2}{(b^2 + n^2 \cdot \pi^2) \cdot n^2 \cdot \pi^2} \cdot ((-1)^n \cdot e^{-b} - 1) \cdot e^{-n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

$$\theta := \frac{\lambda(T - T0)}{q L} = (1 - e^{-b}) \left(Fo + \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{x}{L} - \frac{e^{-\frac{b x}{L}}}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{2 b^2 ((-1)^n e^{-b} - 1) e^{-n^2 \pi^2 Fo} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right)}{(b^2 + n^2 \pi^2) n^2 \pi^2} \quad (4)$$

```
>
```

Umgestellt nach Temperatur

$$T := \frac{1}{\lambda} \left(\left((1 - e^{-b}) \cdot \left(Fo + \frac{\left(3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right)}{6} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\left(1 - \frac{2x}{L} \right)}{2} - \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{b \cdot x}{L}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{n=1}^N \frac{2 b^2}{(b^2 + n^2 \cdot \pi^2) \cdot n^2 \cdot \pi^2} \cdot ((-1)^n \cdot e^{-b} - 1) \cdot e^{-n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right) \cdot q \cdot L \right) + T0$$

$$T := \frac{1}{\lambda} \left(\left((1 - e^{-b}) \left(Fo + \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{x}{L} - \frac{e^{-\frac{bx}{L}}}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{2b^2((-1)^n e^{-b} - 1) e^{-n^2 \pi^2 Fo} \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right)}{(b^2 + n^2 \pi^2) n^2 \pi^2} \right) q L \right) + T0 \quad (5)$$

> $\lambda := 0.63$

$$\lambda := 0.63 \quad (6)$$

> $\rho := 998$

$$\rho := 998 \quad (7)$$

> $Cp := 4180$

$$Cp := 4180 \quad (8)$$

> $L := 1.86$

$$L := 1.86 \quad (9)$$

> $a := \frac{\lambda}{\rho \cdot Cp}$

$$a := 1.510197428 \cdot 10^{-7} \quad (10)$$

> $q := 360$

$$q := 360 \quad (11)$$

> $T0 := 10$

$$T0 := 10 \quad (12)$$

> $N := 500$

$$N := 500 \quad (13)$$

> $Fo := \frac{a \cdot \tau}{L^2}$

$$Fo := 4.365237103 \cdot 10^{-8} \tau \quad (14)$$

> $b := L \cdot k$

$$b := 1.86 k \quad (15)$$

> $k := 2.5$

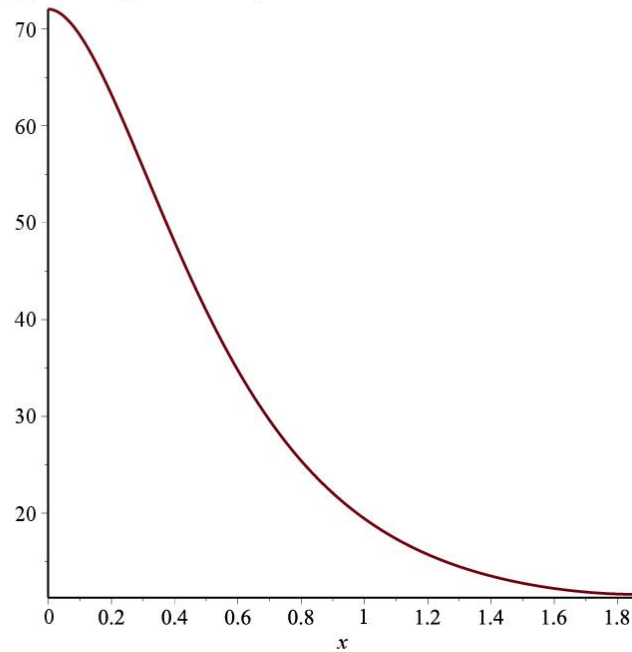
$$k := 2.5 \quad (16)$$

$$T := \text{unapply} \left(\frac{1}{\lambda} \left(\left((1 - e^{-b}) \cdot \left(Fo + \frac{\left(3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right)}{6} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\left(1 - \frac{2x}{L} \right)}{2} - \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{bx}{L}} + \sum_{n=1}^N \frac{2b^2}{(b^2 + n^2 \pi^2) \cdot n^2 \pi^2} \cdot ((-1)^n \cdot e^{-b} - 1) \cdot e^{-n^2 \pi^2 Fo} \cdot \cos\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right) \cdot q \cdot L \right) + T0, x, \tau \right)$$

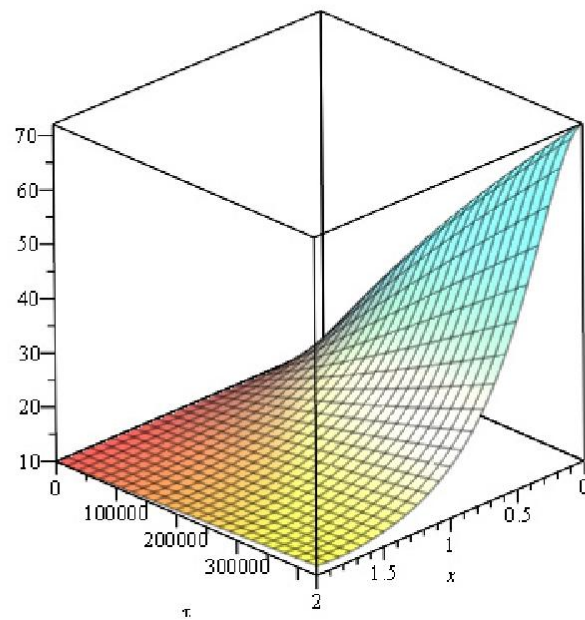
$$T := (x, \tau) \rightarrow -571.4285715 x + 0.00004595261204 \tau + 414.6646278 \\ - 5.317750147 \cdot 10^{-7} e^{-0.01289435996 \tau} \cos(292.2018974 x) \\ - 5.098123557 \cdot 10^{-7} e^{-0.01304385853 \tau} \cos(293.8909257 x)$$

$$\begin{aligned}
 & - 5.078797162 \cdot 10^{-7} e^{-0.01319421877 \tau} \cos(295.5799540 x) \\
 & - 4.870318788 \cdot 10^{-7} e^{-0.01334544067 \tau} \cos(297.2689823 x) \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

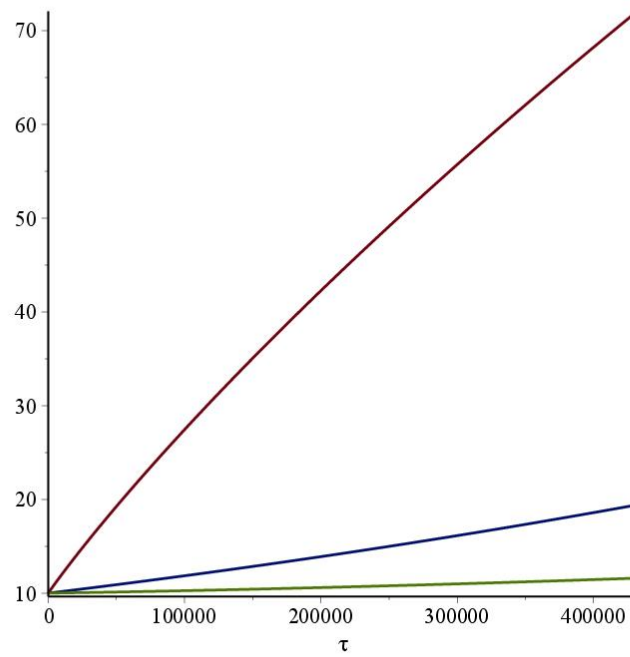
```
> plot(T(x, 432000), x=0..1.86)
```



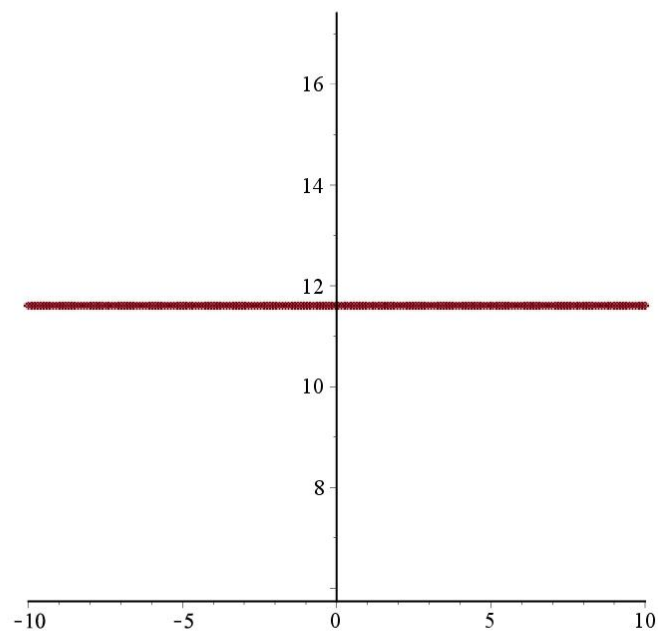
```
> plot3d(T(x, \tau), x=0..2, \tau=0..432000)
```



```
> plot( [ T(0,  $\tau$ ), T(1,  $\tau$ ), T(1.86,  $\tau$ ) ],  $\tau=0..432000$ )
```



```
> plot(T(1.86, 432000), style = point)
```



```
> τ := 432000
```

```
τ := 432000
```

(17)

$$\begin{aligned}
 &> \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\lambda} \left(\left((1 - e^{-b}) \cdot \left(Fo + \frac{3 \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1}{6} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\left(1 - \frac{2x}{L} \right)}{2} - \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{b \cdot x}{L}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2b^2}{(b^2 + \pi^2) \cdot \pi^2} \cdot ((-1) \cdot e^{-b} - 1) \cdot e^{-\pi^2 \cdot Fo} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \right) \cdot q \cdot L \right) + T_0 \, dx
 \end{aligned}$$

```
29.85152840
```

(18)

```
> Tp := e^{-kL}
```

```
Tp := 0.009561601931
```

(19)

```
> a := (1 - e^{-kL})#
```

```
a := 0.9904383981
```

(20)